FONCTION EXPONENTIELLE

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/aD03wqgxexk**](https://youtu.be/aD03wqgxexk)

**Partie 1 : Introduction de la fonction exponentielle**

 1) Définition

Propriété et définition : Il existe une unique fonction dérivable sur ℝ telle que et . Cette fonction s’appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Conséquence :



Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :

Remarque : On verra plus bas que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse le milliard.

Pour des valeurs de de plus en plus grandes, la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus grandes.

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur ℝ.

 2) Variations et courbe

Par définition de la fonction , on a :

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ et

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.

Démonstration : car .



 3) Propriétés

Théorème :

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement. On l’appelle relation fonctionnelle.

Corollaires :

a) ou encore

b)

c) avec

Démonstration du a et b :

a)

b)

 =

**Partie 2 : Le nombre**

 1) Le nombre

Notation : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée *e*.

On a ainsi

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de *e*.



Notation nouvelle :

 **Divertissement :**



Notation : On note pour tout réel,

Dans la suite, on utiliser la notation pour désigner la fonction

exponentielle.

*Richard Sabey (2004)*

Comme , le nombre *e* est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.
Ses premières décimales sont :

*e* 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995

9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…

Le nombre *e* est également un nombre transcendant. On dit qu’un nombre est transcendant s’il n’est solution d’aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre    par exemple, est irrationnel mais n’est pas transcendant puisqu’il est solution de l’équation . Un tel nombre est dit «algébrique».

Le premier à s’intéresser de façon sérieuse au nombre *e* est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C’est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu’il s’agisse de l’initiale de son nom mais peut être car *e* est la première lettre du mot exponentielle.

Dans *« Introductio in Analysin infinitorum »* publié en 1748, *Euler*explique que :

 …
Rappelons que par exemple 5! se lit "factorielle 5" et est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5.
Par cette formule, il obtient une estimation de *e* avec 18 décimales exactes.

Nous devons aussi à Euler la démonstration de l’irrationalité de *e*.

 2) Propriétés

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriétés :

● et

●

● , avec .

Méthode : Simplifier les écritures

 **Vidéo** [**https://youtu.be/qDFjeFyA\_OY**](https://youtu.be/qDFjeFyA_OY)

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

**Correction**

 3) Équations et inéquations contenant des exponentielles

Propriétés :

a)

b)

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation contenant des exponentielles

 **Vidéo** [**https://youtu.be/dA73-HT-I\_Y**](https://youtu.be/dA73-HT-I_Y)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y**](https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y)

a) Résoudre dans ℝ l'équation .

b) Résoudre dans ℝ l'inéquation .

**Correction**

a)

Donc ou

.

b)

 .

**Partie 3 : Étude de la fonction exponentielle**

 1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ et

Méthode : Dériver une fonction exponentielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XcMePHk6Ilk**](https://youtu.be/XcMePHk6Ilk)

Dériver les fonctions suivantes :

a) b) c)

**Correction**

a)

b)

Avec

c)

Avec :

 2) Variations et courbe de la fonction exponentielle

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.



|  |  |
| --- | --- |
|  |   |
|  | + |
|  |  0 |

Méthode : Étudier une fonction exponentielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_MA1aW8ldjo**](https://youtu.be/_MA1aW8ldjo)

Soit la fonction définie sur ℝ par .

a) Calculer la dérivée de la fonction .

b) Dresser le tableau de variations de la fonction .

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d’abscisse 0.

d) Tracer la courbe représentative de la fonction en s'aidant de la calculatrice.

**Correction**

a)

Avec

 Factoriser permet d’étudier son signe à la question b.

b) Comme , est du signe de .

On commence par résoudre l’équation .

Soit : .

La fonction est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 1 est positif.

Donc la fonction est croissante. Elle est donc d’abord négative (avant ) puis positive (après ).

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  –2  |
|  |  0  |
|  |     |

.

c)

Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : *,* soit :



d)

**Partie 4 : Fonctions de la forme**

 1) Dérivabilité

Propriété :

La fonction définie par est dérivable sur ℝ et .

Démonstration :

On rappelle que la dérivée d’une fonction composée est

En considérant , et , on a : .

Méthode : Dériver une fonction du type

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RlyFEcx5Y3E**](https://youtu.be/RlyFEcx5Y3E)

Dériver les fonctions suivantes :

**Correction**

*b*)

Avec :

 2) Variations et courbe

Propriété :

Si  : la fonction est strictement croissante.

Si  : la fonction est strictement décroissante.

Démonstration :

On a :

Or, pour tout réel et tout entier relatif non nul.

Donc le signe de la dérivée dépend du signe de .

Si  alors la dérivée est strictement positive et donc la fonction est strictement croissante.

Si  alors la dérivée est strictement négative et donc la fonction est strictement décroissante.



Méthode : Étudier une fonction dans une situation concrète

 **Vidéo** [**https://youtu.be/lsLQwiB9Nrg**](https://youtu.be/lsLQwiB9Nrg)

Par suite d’une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction définie sur [0 ; 10]

et telle que .

1) Montrer que la fonction *f* définie sur [0 ; 10] par convient.

2) On suppose que . Déterminer .

3) Déterminer les variations de sur [0 ; 10].

4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.

 b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l’heure près.

**Correction**

1) .

La fonction définie sur [0 ; 10] par vérifient bien l’égalité

 donc elle convient.

2) .

Donc, si , on a : .

Une expression de la fonction est donc : .

3) Comme , on en déduit que la fonction est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction .

4) a)

Après 3h, l’organisme contient environ 76 000 bactéries.

Après 5h30, l’organisme contient environ 108 000 bactéries.

 b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.



**Partie 5 : Exponentielle et suite géométrique**

Propriété : Pour tout réel , on a :

La suite est une suite géométrique de raison .

Méthode : Déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/hKh-ry9AAO0**](https://youtu.be/hKh-ry9AAO0)

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

 a) b) c) d)

2) a) Déterminer une expression en fonction de de la suite géométrique de raison et de premier terme 3.

 b) Donner les variations de cette suite.

**Correction**

On rappelle qu’une suite géométrique de raison et de premier terme a pour terme général : .

1) a)

 est une suite géométrique de raison et de premier terme 1.

b)

 est une suite géométrique de raison et de premier terme 2.

c)

 est une suite géométrique de raison et de premier terme –1.

d)

 est une suite géométrique de raison et de premier terme .

2) a) est suite géométrique de raison et de premier terme 3, donc :

.

 b) La raison de la suite est telle que , donc la suite est décroissante.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)