PRODUIT SCALAIRE – Chapitre 1/2

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/dII7myZuLvo**](https://youtu.be/dII7myZuLvo)



La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.

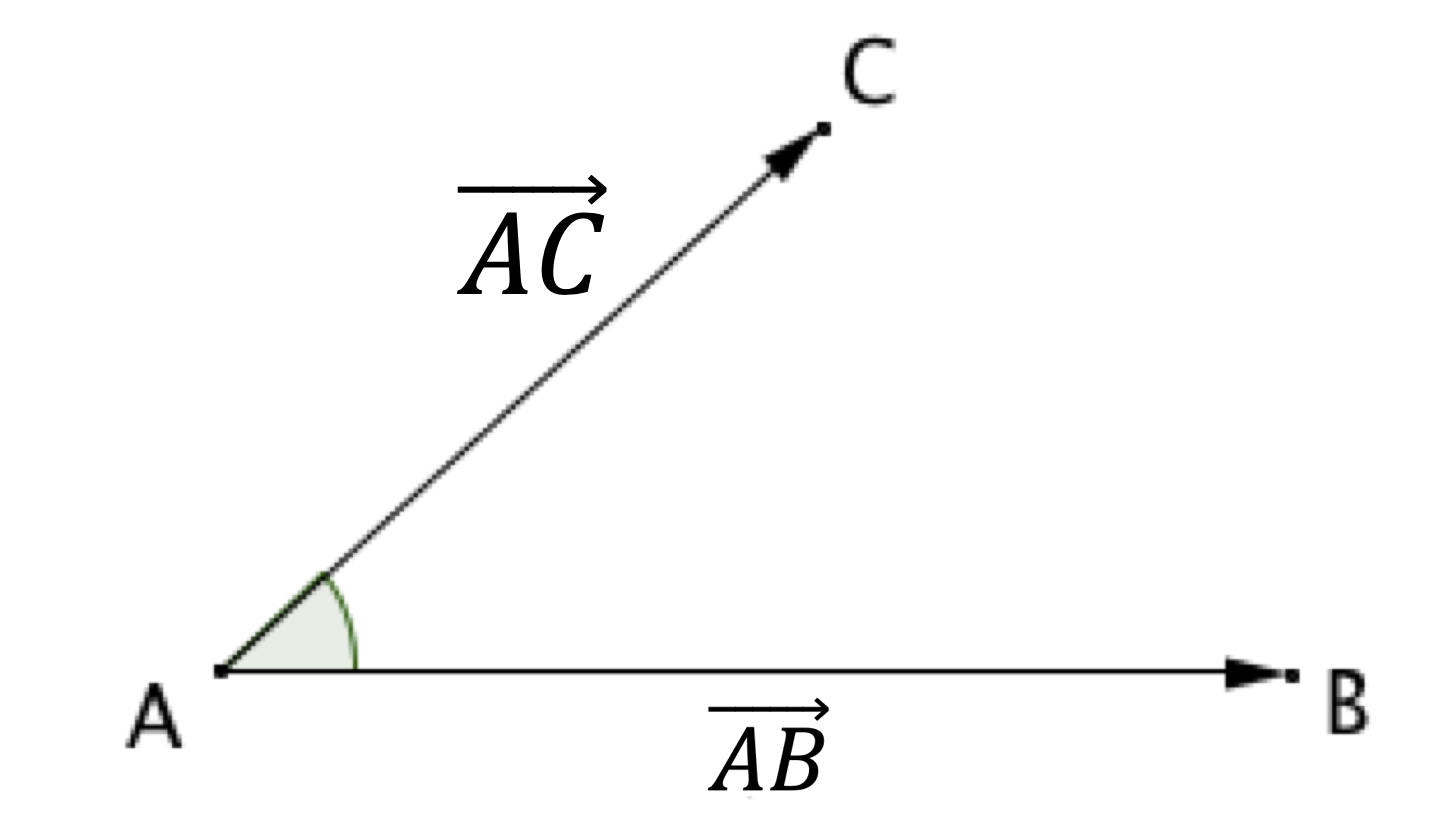
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

**Partie 1 : Définitions et propriétés**

1) Définitions

Définition : Soit deux points et .

La **norme du vecteur** , notée , est la distance .

Définition : Soit et deux vecteurs.

On appelle **produit scalaire** de par , noté , le

nombre réel défini par :

.

Propriété :

Remarques :

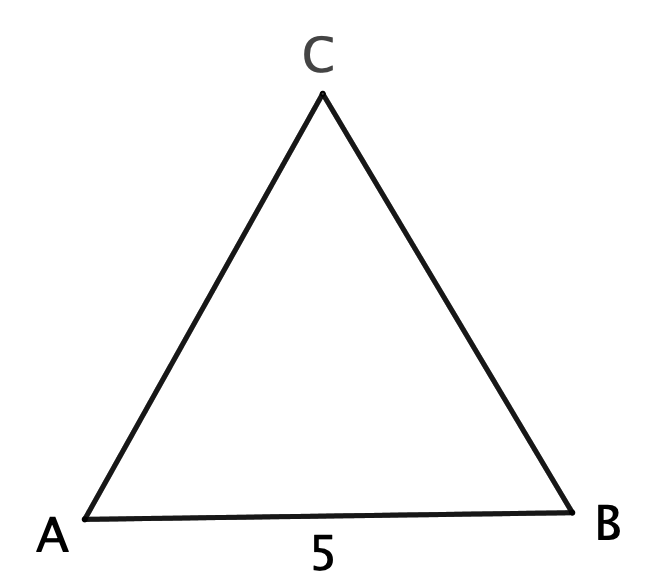
* se lit «  scalaire  ».
* Si l'un des deux vecteurs et est nul, alors ,

Exemple :

On donne : , et .

Alors : .

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide de la formule du cosinus



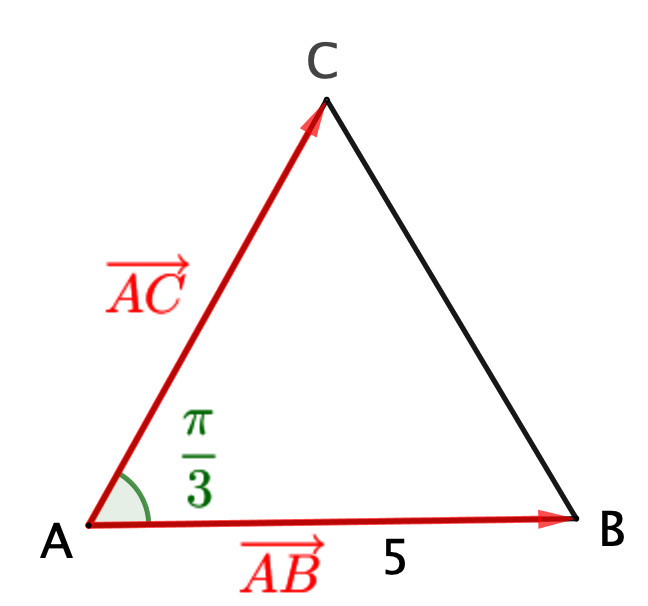
 **Vidéo** [**https://youtu.be/dfxz40fK0UI**](https://youtu.be/dfxz40fK0UI)

a) Soit un triangle équilatéral de côté *5*.

Calculer le produit scalaire .

b) Soit le milieu de [].

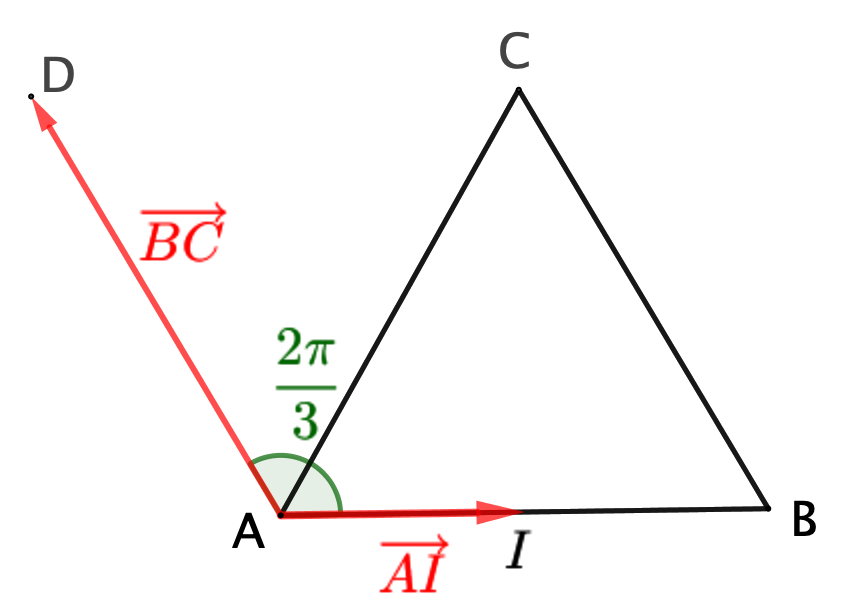
Calculer le produit scalaire .

**Correction**

a)

b) Le produit scalaire est composé de deux vecteurs qui n’ont pas la même origine.

On construit alors un point tel que : .

De cette façon, le produit scalaire à calculer est composé de deux vecteurs de même origine le point (voir figure ci-contre).

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple est une maladresse à éviter !

2) Propriétés

Propriété de symétrie :

Propriétés de bilinéarité :

1) 2) , avec un nombre réel.

Identités remarquables :

1) ⟶ On peut également noter :

2)

3)

Méthode : Appliquer les propriétés du produit scalaire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_SDj-fG1S18**](https://youtu.be/_SDj-fG1S18)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/P0nKS-cTEO0**](https://youtu.be/P0nKS-cTEO0)

Soit et deux vecteurs de normes respectives 2 et 3 et tels que : .

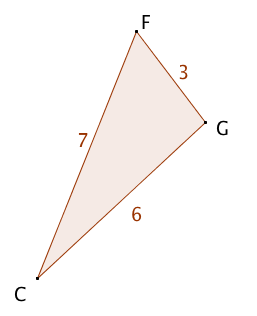
Calculer : a) b) c)

**Correction**

a) c)

**Partie 2 : Produit scalaire et norme**

Propriété : Soit , et trois points. On a :

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des normes

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iNsm05JimgA**](https://youtu.be/iNsm05JimgA)

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire .

**Correction**

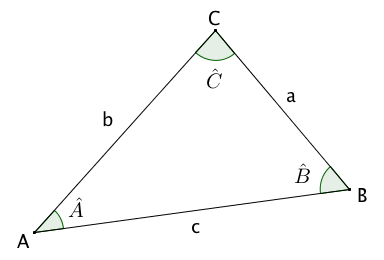


A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud Al Kashi* *(1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.

Dans son Traité sur le cercle (1424), *Al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :

2π ≈ 6,283 185 307 179 586 5

Théorème d’Al Kashi : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :



Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/34OJiQ\_4-N4**](https://youtu.be/34OJiQ_4-N4)

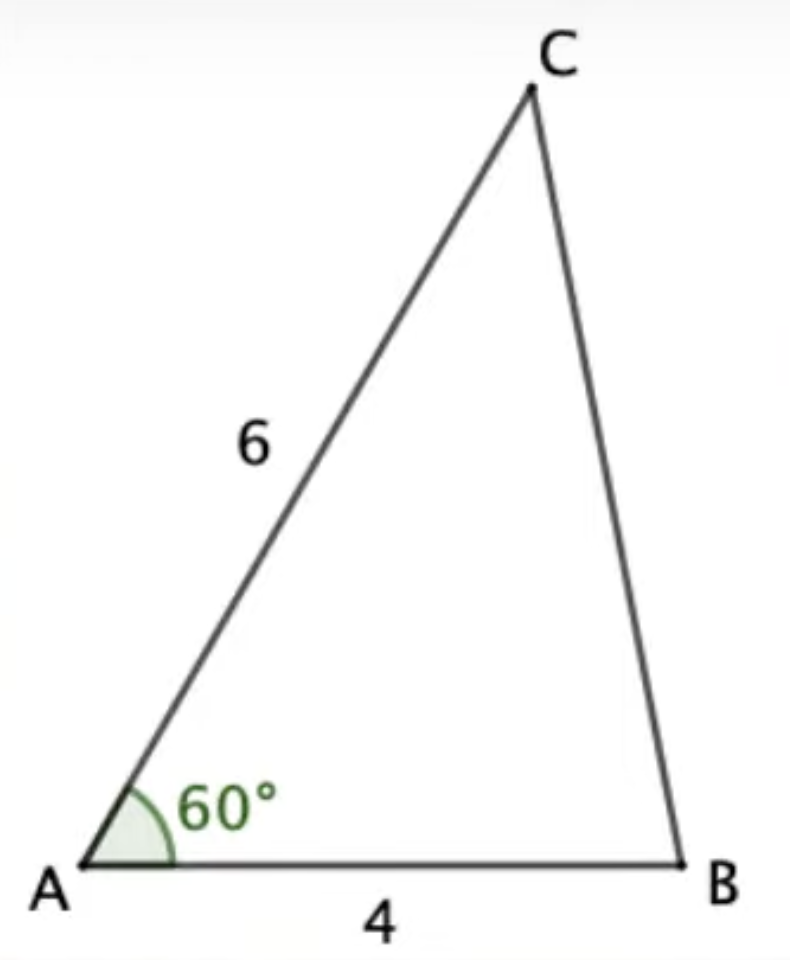
et

Donc :

Soit :

Soit encore :

Méthode : Appliquer le théorème d’Al Kashi pour calculer une longueur



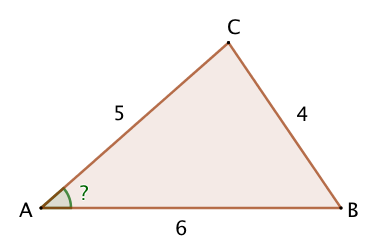
 **Vidéo** [**https://youtu.be/SeFjmbOGhVc**](https://youtu.be/SeFjmbOGhVc)

On considère la figure ci-contre.

Calculer la longueur . On donnera une valeur arrondie au dixième.

**Correction**

D’après le théorème d’Al Kashi, on a :

Méthode : Appliquer le théorème d’Al Kashi pour calculer un angle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc**](https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc)

On considère la figure ci-contre. Calculer la mesure de l’angle au degré près.

**Correction**

D’après le théorème d’Al Kashi, on a :



*Même les Playmobil connaissent le théorème d’al Kashi !*



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)