FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

Chapitre 2/2

**Partie 1 : Forme factorisée d’une fonction polynôme de degré 2**

Exemple :

La fonction$ f $définie par $f\left(x\right)=2\left(x-2\right)\left(x+2\right)$ est une fonction du second degré.

En effet, elle s’écrit aussi sous la forme $x⟼ax^{2}+b$.

$f\left(x\right)=2\left(x-2\right)\left(x+2\right)=2\left(x^{2}-4\right)=2x^{2}-8$.

Définition : Les fonctions définies sur ℝ par $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.

Les coefficients $a$, $x\_{1} $et $x\_{2} $sont des réels avec $a\ne 0$.

A noter : Plus généralement, on appelle fonction polynôme de degré 2, toute fonction qui s’écrit sous la forme $x⟼ax^{2}+bx+c$.

Par exemple, la fonction $x⟼3x^{2}-2x+1$ est une fonction polynôme du second degré.

Propriété : Soit la fonction$ f $définie sur $R$ par $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)$.

L’équation $f\left(x\right)=0$ possède deux solutions (éventuellement égales) : $x=x\_{1}$ et

$x=x\_{2}$ appelées les **racines** de la fonction polynôme$ f.$

Propriété : Soit la fonction$ f $définie sur ℝ par $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)$.

La droite d’équation $x=p$ avec $p=$ $\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}$ est l’axe de symétrie de la parabole représentant la fonction$ f.$

Méthode : Représenter graphiquement une fonction du second degré à partir de sa forme factorisée.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/riqMPcUT\_Ts**](https://youtu.be/riqMPcUT_Ts)

On considère la fonction$ f $définie sur ℝ par $f\left(x\right)=2\left(x-2\right)\left(x+4\right)$.

Déterminer :

 a) l’intersection de la courbe de$ f $avec l’axe des abscisses,

 b) son axe de symétrie,

 c) les coordonnées de son extremum.

Placer au fur et à mesure ces éléments géométriques dans un repère puis tracer la parabole représentant la fonction$ f.$

**Correction**

a) Pour déterminer l’intersection de la courbe de$ f $avec l’axe des abscisses, il suffit de résoudre l’équation $f\left(x\right)=0$.

Soit : $2\left(x-2\right)\left(x+4\right)=0$.

Il s’agit d’une équation-produit. On a donc :

$x-2=0$ ou $x+4=0$ soit : $x=2$ ou $x=-4$.

La courbe de$ f $traverse l’axe des abscisses en $x=-4$ et en $x=2$.

On peut marquer ces deux points d’intersection, A et B, dans le repère.

b) Ici, $f\left(x\right)=2\left(x-2\right)\left(x+4\right)$ donc $x\_{1}=2$ et $x\_{2}=-4$, et

donc $ p=$ $\frac{2-4}{2}$ $=-1.$

La droite d’équation $x=-1$ est l’axe de symétrie de la parabole représentant la fonction$ f.$

On peut tracer cette droite dans le repère.



c) - Le sommet S de la parabole se trouve sur l’axe de symétrie, donc il a pour abscisse $p$ = –1 et pour ordonnées :

$$f\left(p\right)=f\left(-1\right)=2\left(-1-2\right)\left(-1+4\right)$$

$$=2×\left(-3\right)×3=-18$$

Le sommet de la parabole S est donc le point de coordonnées (–1 ; –18).

On peut placer le point S dans le repère.

- L’expression de la fonction$ f $est

$f\left(x\right)=2\left(x-2\right)\left(x+4\right)$, donc *a* = 2 > 0.



On en déduit que la parabole représentant la fonction$ f $possède des branches tournées vers le haut. Le sommet de la parabole correspond donc au minimum de la fonction$ f.$

On trace ainsi la parabole

passant par les points S, A et B.

Méthode : Associer une fonction du second degré à sa représentation graphique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Yrt2Cdx1uk4**](https://youtu.be/Yrt2Cdx1uk4)

Associer chaque fonction à sa représentation

graphique :



**Correction**

- On a : $h\left(x\right)=5\left(x-1\right)^{2}=5\left(x-1\right)\left(x-1\right)$.

La fonction $h$ est la seule à posséder une **racine double égale à 1**. Cela signifie que la parabole correspondante ne possède qu’un seul point d’intersection avec l’axe des abscisses.

La **parabole bleue** intercepte l’axe des abscisses en 1 uniquement, c’est donc la représentation graphique de la fonction $h$.

- Les fonctions$ f $et $g$ sont de la forme $f\left(x\right)=3\left(x-1\right)\left(x+3\right)$ et

$g\left(x\right)=-2\left(x-1\right)\left(x+3\right)$.

Ces fonctions possèdent donc toutes les deux les mêmes racines : $x\_{1}=1$ et $x\_{2}=-3$.

On peut donc les associer à la **parabole rouge** et à la **parabole verte** qui passent toutes les deux par les points d’abscisse –3 et 1.

Les branches de la **parabole verte** sont tournées vers le haut donc $a$> 0 dans l’écriture de la fonction $x⟼a\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)$.

Ainsi, la **parabole verte** représente la fonction$ f $pour qui $a$= 3 > 0.

La **parabole rouge** représente alors la fonction $g$.

Méthode : Factoriser une expression du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/FoNm-dlJQLc**](https://youtu.be/FoNm-dlJQLc)

On considère la fonction$ f $définie sur ℝ par $f\left(x\right)=2x^{2}+4x-6$.

a) Conjecturer une racine de la fonction polynôme$ f $et vérifier par calcul.

b) Factoriser$ f.$

**Correction**

a) On peut conjecturer que 1 est racine de la fonction polynôme$ f.$

En effet, $f\left(1\right)=2×1^{2}+4×1-6=2+4-6=0$.

b) D’après l’expression de la fonction $f$, on a : $f\left(x\right)=2x^{2}+4x-6$.

On peut affirmer que $a=2$.

Par ailleurs, 1 est une racine de$ f.$ Donc, sous sa forme factorisée,$ f $s’écrit :

$f\left(x\right)=2\left(x-1\right)\left(x-x\_{2}\right)$.

Il s’agit donc de déterminer $x\_{2}$, tel que : $2x^{2}+4x-6=2\left(x-1\right)\left(x-x\_{2}\right)$.

En prenant par exemple $x=0$, cette égalité s’écrit : $-6=2\left(-1\right)\left(-x\_{2}\right)$, soit $-6=2x\_{2}$ ou encore $-3=x\_{2}$.

Ainsi, sous sa forme factorisée, la fonction polynôme$ f $s’écrit $f\left(x\right)=2\left(x-1\right)\left(x-\left(-3\right)\right)$ ou encore $ f\left(x\right)=2\left(x-1\right)\left(x+3\right)$.

**Partie 2 : Signe d’une fonction polynôme de degré 2**

Méthode : Étudier le signe d’un polynôme du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/EjR6TCc\_fdg**](https://youtu.be/EjR6TCc_fdg)

Étudier le signe de la fonction polynôme$ f $définie sur ℝ par $f\left(x\right)=-2\left(x-3\right)\left(x+2\right)$

**Correction**

Le signe de $-2\left(x-3\right)\left(x+2\right)$ dépend du signe de chaque facteur $-2$, $x $– 3 et $x$ + 2.

On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

 $x$ – 3 = 0 ou $x$+2 = 0

 $x$ = 3 $x$ = –2

En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $f\left(x\right)=-2\left(x-3\right)\left(x+2\right)$.



On en déduit que $f(x)\geq 0$ pour $x\in \left[-2 ;3\right]$ et

$f(x)\leq 0$ pour $x\in \left]-\infty ; -2\right]∪\left[3 ; +\infty \right[$.

La représentation de la fonction$ f $à l’aide d’un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.



**Partie 3 : Équation de la forme x² = c**

Propriété :

Les solutions dans $R$ de l’équation $x^{2}=c $dépendent du signe de $c$*.*

Si $c$ < 0, alors l’équation n’a pas de solution.

Si $c$ = 0, alors l’équation possède une unique solution qui est 0.

Si $c$ > 0, alors l’équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{c}$ et $-\sqrt{c}$.

Méthode : Résoudre une équation du type x2 = c

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ef15aeQRs6w**](https://youtu.be/ef15aeQRs6w)

Résoudre dans $R$ les équations :

a) $x^{2}=16 $ b) $x^{2}=-8$ c) $2x^{2}-8=120$

**Correction**

a) 16 est positif donc l’équation $x^{2}=16$ admet deux solutions $x=\sqrt{16}=4$ et

$x=-\sqrt{16}=-4$.

b) –8 est négatif donc l’équation $x^{2}=-8$ n’a pas de solution dans ℝ.

c) $2x^{2}-8=120$

$$2x^{2}=120+8$$

$$2x^{2}=128$$

$$x^{2}=64$$

L’équation admet donc deux solutions $x=\sqrt{64}=8$ et $x=-\sqrt{64}=-8$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)