PRODUIT SCALAIRE



La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.

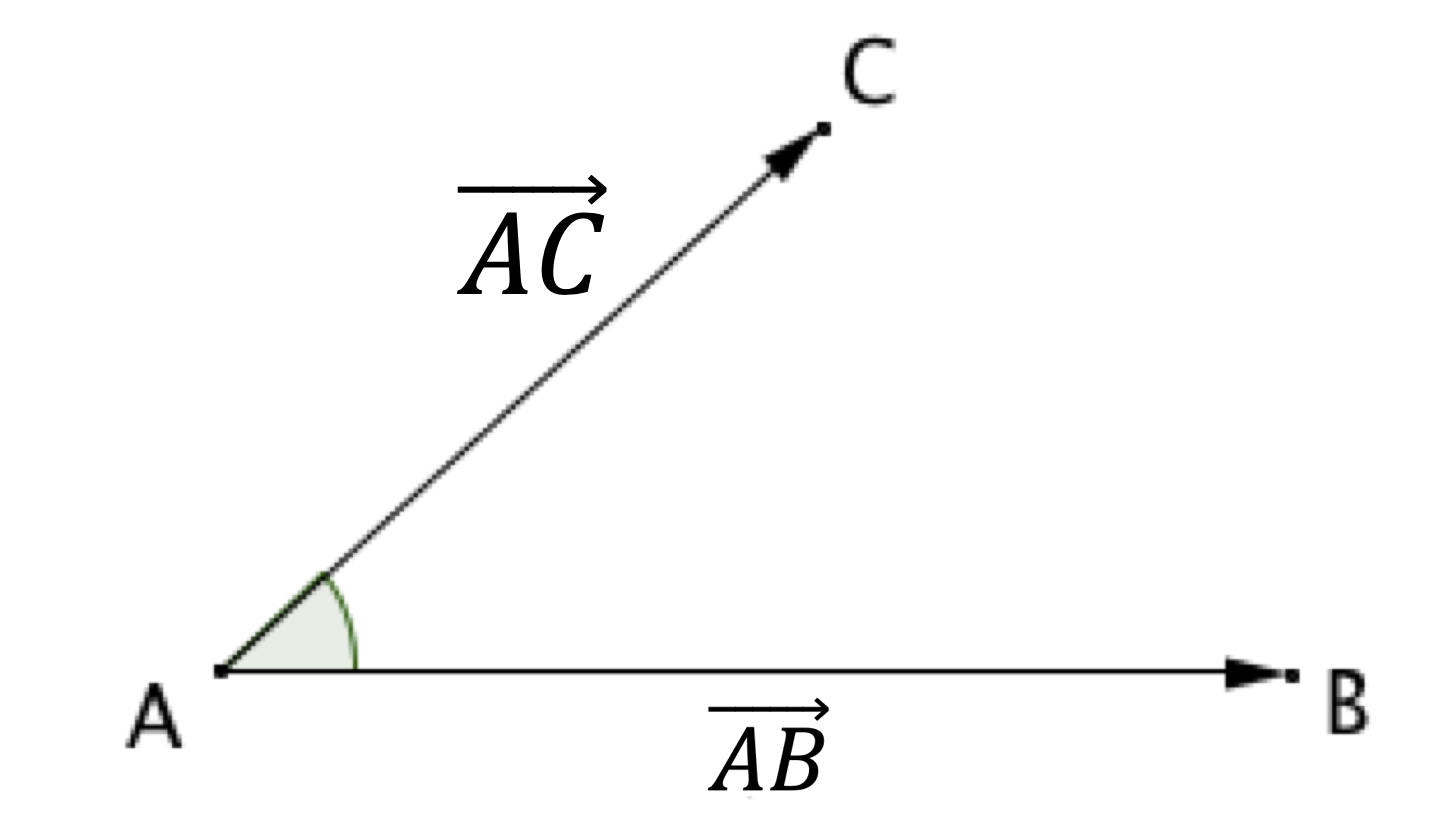
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

**Partie 1 : Définition et propriétés**

1) Définitions

Définition : Soit deux points et .

La **norme du vecteur** , notée , est la distance .

Définition : Soit et deux vecteurs.

On appelle **produit scalaire** de par , noté , le

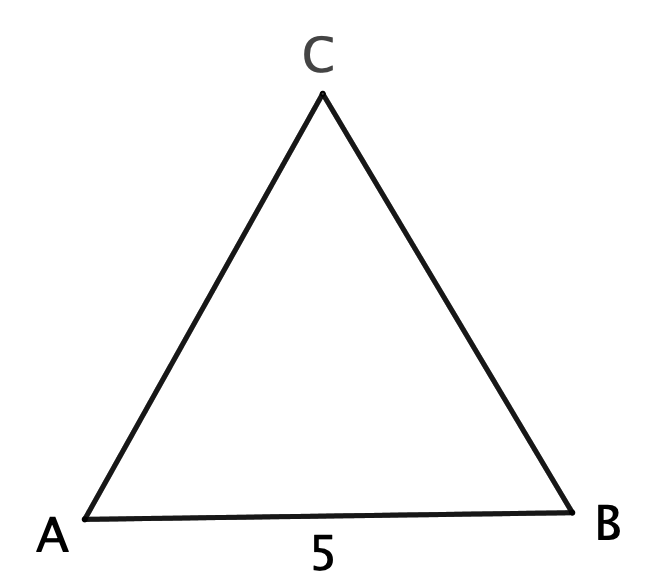
nombre réel défini par :

.

Propriété :

Remarques :

* se lit «  scalaire  ».
* Si l'un des deux vecteurs et est nul, alors ,

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide de la formule du cosinus

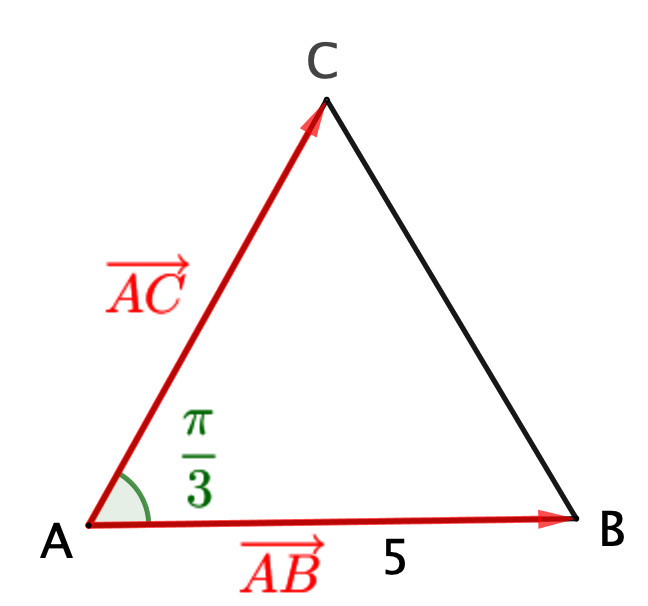
 **Vidéo** [**https://youtu.be/dfxz40fK0UI**](https://youtu.be/dfxz40fK0UI)

a) Soit un triangle équilatéral de côté *5*.

Calculer le produit scalaire .

b) Soit le milieu de [].

Calculer le produit scalaire .

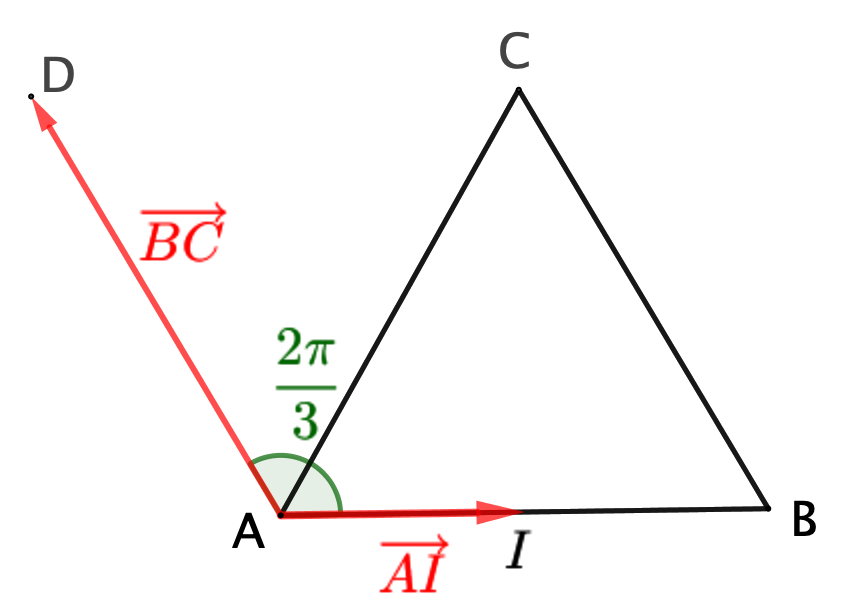


**Correction**

a)

b) Le produit scalaire est composé de deux vecteurs qui n’ont pas la même origine.

On construit alors un point tel que : .

De cette façon, le produit scalaire à calculer est composé de deux vecteurs de même origine le point (voir figure ci-contre).

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple est une maladresse à éviter !

2) Propriétés

Propriété de symétrie :

Propriétés de bilinéarité :

1) 2) , avec un nombre réel.

Identités remarquables :

1) ⟶ On peut également noter :

2)

3)

Méthode : Appliquer les propriétés du produit scalaire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_SDj-fG1S18**](https://youtu.be/_SDj-fG1S18)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/P0nKS-cTEO0**](https://youtu.be/P0nKS-cTEO0)

Soit et deux vecteurs de normes respectives 2 et 3 et tels que : .

Calculer : 1) 2) 3)

**Correction**

1) 3)

**Partie 2 : Produit scalaire et orthogonalité**

1) Projeté orthogonal

Propriété : Les vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si .

Démonstration :

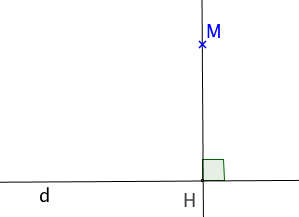
Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

Les vecteurs et sont orthogonaux

Définition : Soit une droite *d* et un point M.

Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Une image contenant texte, antenne

Description générée automatiquementPropriété : Soit et deux vecteurs non nuls.

est le projeté orthogonal du point sur la

droite ().

On a :

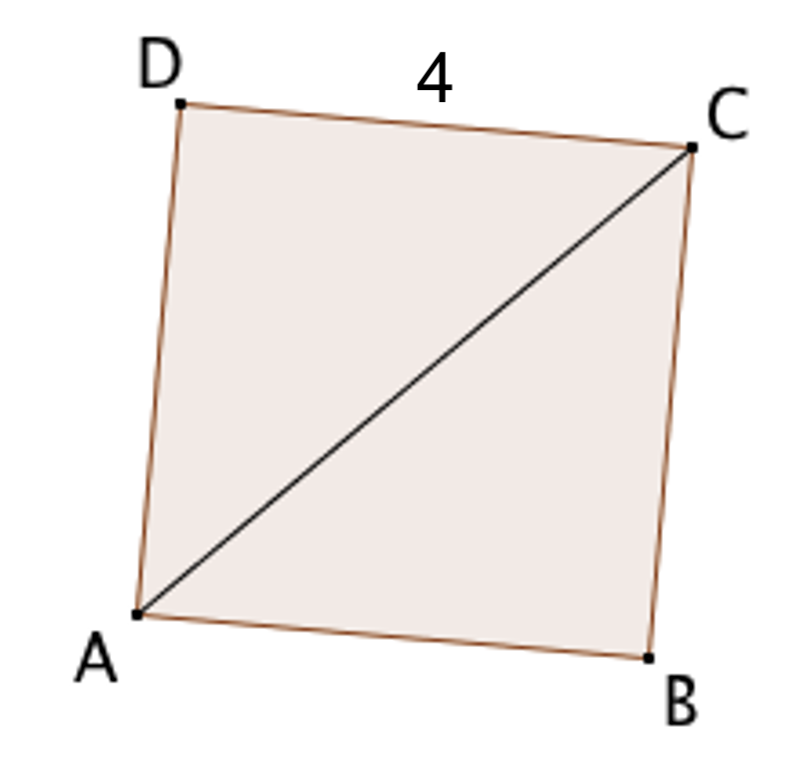
Démonstration :

, d’après la relation de Chasles.

En effet, les vecteurs et sont orthogonaux donc .

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

 **Vidéo** [**https://youtu.be/2eTsaa2vVnI**](https://youtu.be/2eTsaa2vVnI)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/K4Izn5xB\_Qk**](https://youtu.be/K4Izn5xB_Qk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-Hr28g0PFu0**](https://youtu.be/-Hr28g0PFu0)

Soit un carré de côté 4.

Calculer les produits scalaires :

a) b) c)

**Correction**

a) est le projeté orthogonal de sur (), alors :

b) car les vecteurs et sont orthogonaux.

c) Comme , on a :

**Partie 3 : Produit scalaire dans un repère orthonormé**

Le plan est muni d'un repère orthonormé .

Propriété : Soit et deux vecteurs.

On a : et .

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des coordonnées (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aOLRbG0IibY**](https://youtu.be/aOLRbG0IibY)

Soit et deux vecteurs. Calculer

**Correction**

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des coordonnées (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ**](https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ)

On considère quatre points , , et .

Démontrer que les droites () et () sont perpendiculaires.

**Correction**

- Calculons les coordonnées des vecteurs et .

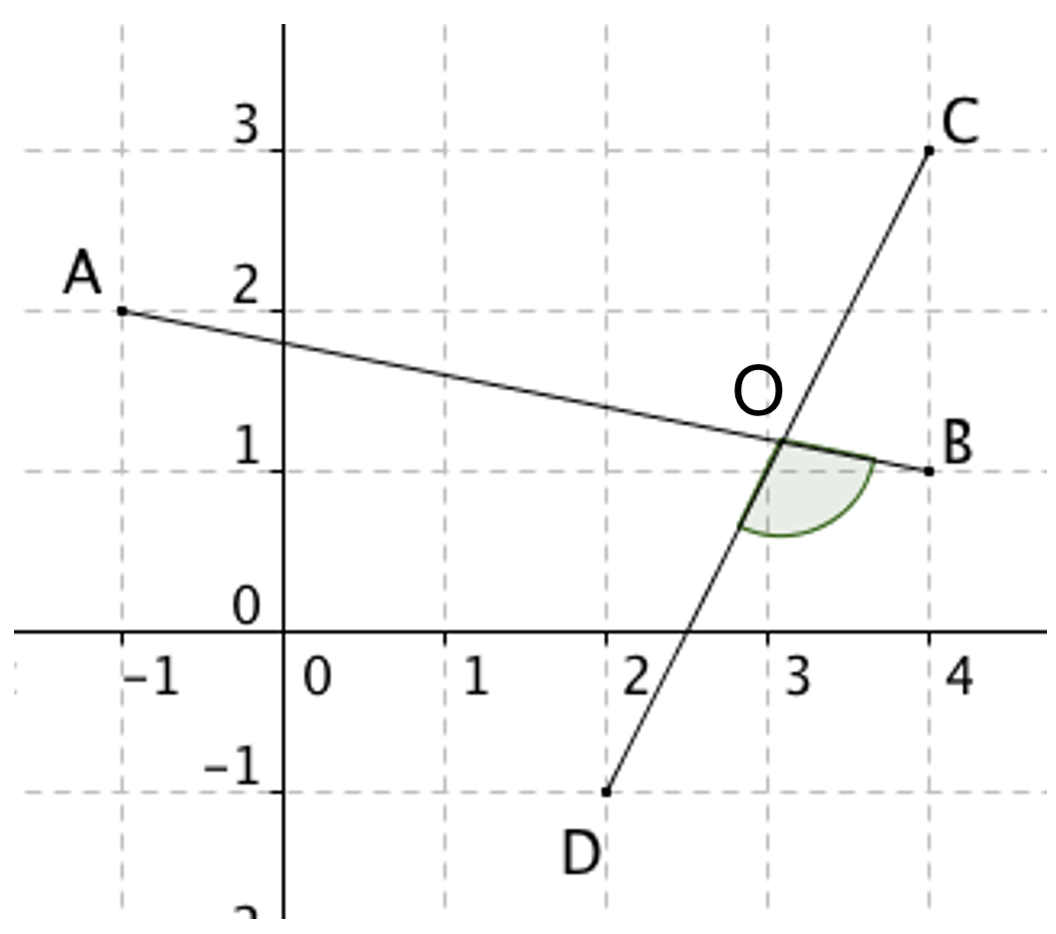
et

- Calculons le produit scalaire des deux vecteurs :

- Le produit scalaire est nul donc les vecteurs et sont orthogonaux.

Et donc, les droites () et () sont perpendiculaires.

Méthode : Appliquer plusieurs formules du produit scalaire



 **Vidéo** [**https://youtu.be/Ok6dZG8WIL8**](https://youtu.be/Ok6dZG8WIL8)

Calculer la mesure de l'angle en calculant le produit scalaire de deux façons.

On pourra lire les coordonnées des points , , et dans le repère ci-contre.

**Correction**

● En calculant le produit scalaire avec la formule du cosinus, on a :

Or :

Donc :

● En calculant le produit scalaire avec la formule des coordonnées, on a :

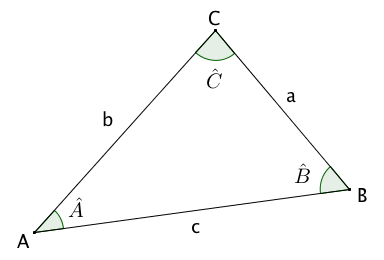
et , donc :

● On a ainsi :

Et donc : .

**Partie 4 : Théorème d'Al Kashi**

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :



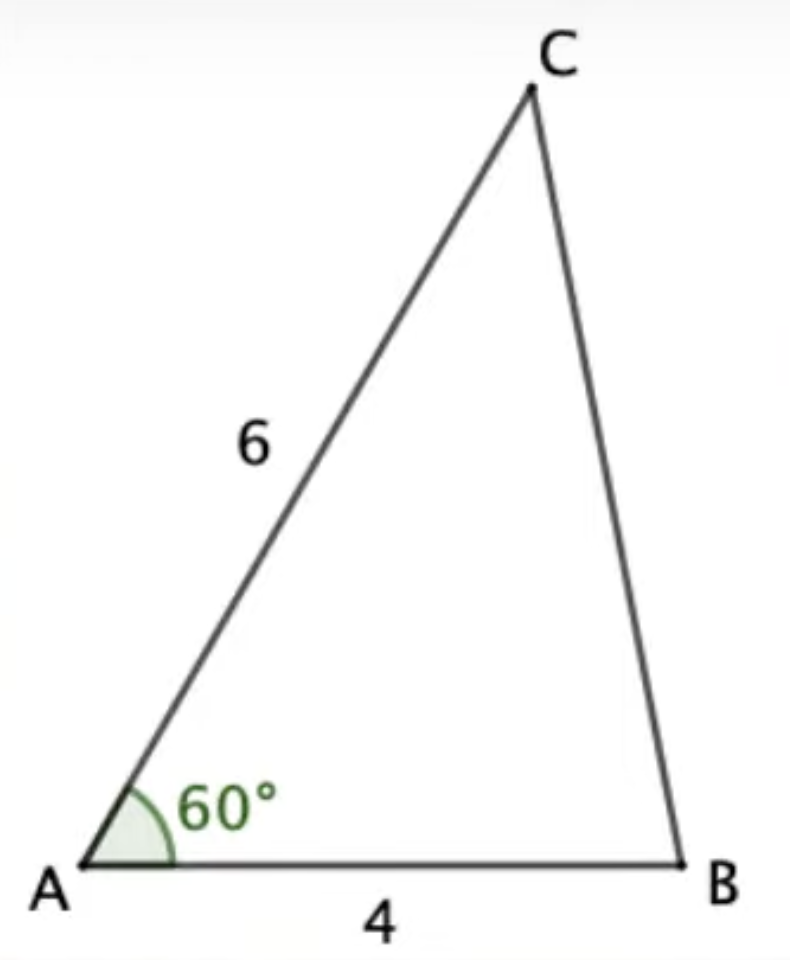
A noter : Si le triangle ABC est rectangle, on retrouve le théorème de Pythagore.

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi* *(1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.

Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de *2*π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :

*2*π ≈ 6,283 185 307 179 586 5

Méthode : Appliquer le théorème d’Al Kashi pour calculer une longueur



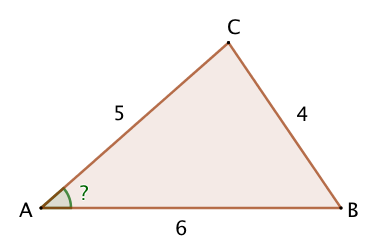
 **Vidéo** [**https://youtu.be/SeFjmbOGhVc**](https://youtu.be/SeFjmbOGhVc)

On considère la figure ci-contre.

Calculer la longueur . On donnera une valeur arrondie au dixième.

**Correction**

D’après le théorème d’Al Kashi, on a :

Méthode : Appliquer le théorème d’Al Kashi pour calculer un angle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc**](https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc)

On considère la figure ci-contre. Calculer la mesure de l’angle au degré près.

**Correction**

D’après le théorème d’Al Kashi, on a :

Une image contenant texte, intérieur, plancher, chambre à coucher

Description générée automatiquement

*Même les Playmobil connaissent le théorème d’al Kashi !*



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)