DIVISIBILITÉ ET CONGRUENCES

**Partie 1 : Divisibilité dans** $Z$

Définition : Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs.

$a$ **divise** $b$ s'il existe un entier relatif $k$ tel que $b=ka$*.*

On dit également :

- $a$ est un **diviseur** de $b$*,*

- $b$ est **divisible** par $a$*,*

- $b$ est un **multiple** de $a$*.*

Notation : $a$ divise $b$ se note : $a$∣$b$

Exemples :

* 56 est un multiple de –8 car 56 = –7 x (–8)
* L'ensemble des multiples de 5 sont {… ; –15 ; –10 ; –5 ; 0 ; 5 ; 10 ; …}. On note cet ensemble $5Z$.
* L’ensemble des diviseurs de 6 sont {–6 ; –3 ; –2 ; –1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 6}
* 0 est divisible par tout entier relatif.

Rappel : Un nombre pair s’écrit sous la forme $2k$, avec $k $entier.

Un nombre impair s’écrit sous la forme $2k+1$, avec $k$ entier.

Propriété : Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs avec $b$ non nul.

$b$ divise $a$ $⟺$ $–b$ divise $a$ $⟺$ $b$ divise $–a$ $⟺$ $–b$ divise $–a$

Propriété (transitivité) : Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers relatifs.

Si $a$ divise $b$ et $b$ divise $c$ alors $a$ divise $c$.

Démonstration :

Si $a$ divise $b$ et $b$ divise $c$ alors il existe deux entiers relatifs $k$ et $k'$ tels que $b=ka$ et

$c=k'b$*.*

Donc$c=k’ka$ et donc il existe un entier relatif $l=kk'$ tel que $c=la$*.*

Donc $a$ divise $c$.

Exemple :

* 3∣12 et 12∣36 donc 3∣36.
* On peut appliquer également la contraposée de la propriété de transitivité :

Comme 2 ne divise pas 1001, aucun nombre pair ne divise 1001.

En effet, si par exemple 10 divisait 1001 alors 2 diviserait 1001.

Méthode : Appliquer la définition de la divisibilité (démonstration par l’absurde)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/z-CtTbP3RYA**](https://youtu.be/z-CtTbP3RYA)

Démontrer que pour tout entier relatif $n$, le nombre $6n+5$ n’est pas divisible par 3.

**Correction**

On va effectuer un raisonnement par l’absurde en supposant le contraire de ce qu’il faut démontrer.

Si notre démonstration aboutit à une « absurdité », une contradiction, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons, *par l’absurde*, qu’il existe un entier relatif $n$, tel que $6n+5$ soit divisible par 3.

Il existe alors un entier relatif $k$ tel que $6n+5=3k.$

Soit : $5=3k-6n$, soit encore : $5=3\left(k-2n\right)$.

Ce qui signifie que 5 est divisible par 3. C’est « absurde », donc l’hypothèse de départ est fausse.

Le nombre $6n+5$ n’est pas divisible par 3

Propriété (combinaisons linéaires) : Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers relatifs.

Si $c$ divise $a$ et $b$ alors $c$ divise $ma+nb$ où $m$ et $n$ sont deux entiers relatifs.

Démonstration :

Si $c$ divise $a$ et $b$ alors il existe deux entiers relatifs $k$ et $k'$ tels que $a=kc$ et

$b=k'c$*.*

Donc $ma+nb=mkc+nk^{'}c=(mk+nk^{'})c$ et donc il existe un entier relatif

$l=mk+nk'$ tel que $ma+nb=lc$*.*

Exemple :

Soit un entier relatif $N$ qui divise les entiers relatifs $n $et $n+1$.

Alors $N$ divise $n+1-n=1$. Donc $N=-1 $ou $N=1$.

En effet, $-1$ ou $1$ divisent deux entiers consécutifs.

Méthode : Utiliser la propriété des combinaisons linéaires (démonstration avec réciproque)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/JGJ0VJV2Zgo**](https://youtu.be/JGJ0VJV2Zgo)

Déterminer les entiers relatifs $n$, tels que $2n+5$ divise $n-1$.

**Correction**

* On a : $2n+5∣2n+5$

**Si** $2n+5$ $∣n-1$ et $2n+5∣2n+5$ , **alors** d’après la propriété des combinaisons linéaires : $2n+5$ $∣-2(n-1)+2n+5$

L’idée est de fabriquer une combinaison linéaire de $n-1$ et $2n+5$ qui ne dépende plus de $n$.

Soit : $2n+5$ $∣-2n+2+2n+5$

Soit encore : $2n+5$ $∣7$.

Les diviseurs de 7 sont : –7 ; –1 ; 1 et 7.

Donc :

$2n+5=-7$ soit $n=-6$

$2n+5=-1$ soit $n=-3$

$2n+5=1$ soit $n=-2$

$2n+5=7$ soit $n=1$

Les solutions possibles appartiennent à l’ensemble {–6 ; –3 ; –2 ; 1}.

Attention, il faut maintenant vérifier la réciproque. En effet, la propriété des combinaisons linéaires (si… alors…) donne une condition nécessaire pour avoir la divisibilité sur les combinaisons linéaires.

On a donc prouvé que, si $2n+5$ divise $n-1$, alors nécessairement $n$ appartient à l’ensemble {–6 ; –3 ; –2 ; 1}. La question est maintenant de savoir s’il suffit de prendre une valeur dans cet ensemble pour que $2n+5$ divise $n-1$.

Il faut donc prouver maintenant que si $n$ appartient à l’ensemble {–6 ; –3 ; –2 ; 1} alors $2n+5$ divise $n-1.$

* Si $n=-6$ :

$2n+5=-7$ et $n-1=-7$. Or, $-7∣-7$, donc $-6$ est bien solution.

Si $n=-3$ :

$2n+5=-1$ et $n-1=-4$. Or, $-1∣-4$, donc $-3$ est bien solution.

Si $n=-2$ :

$2n+5=1$ et $n-1=-3$. Or, $1∣-3$, donc $-2$ est bien solution.

Si $n=1$ :

$2n+5=7$ et $n-1=0$. Or, $7∣0$, donc $-1$ est bien solution.

* Les solutions sont –6, –3, –2 et 1.

**Partie 2 : Division euclidienne**

Propriété : Soit $a$ un entier naturel et $b$ entier naturel non nul.

Il existe un unique couple d’entiers $(q ; r)$ tel que $a=bq+$ *r* avec $0\leq r<b$.

Définitions :

- $q$ est appelé le **quotient** de la division euclidienne de $a$ par $b$,

- $r$ est appelé le **reste**.

Exemple : Dans la division euclidienne de 412 par 15, on a : 412 = 15 x 27 + 7

Démonstration :

**Existence :**

1er cas : $0\leq a<b$ : Le couple (*q* ; *r*) = (0 ; *a*) convient.

2e cas : $b\leq a$ : Soit *E* l'ensemble des multiples de *b* strictement supérieurs à *a*.

Alors *E* est non vide car l'entier $2b×a$ appartient à *E*.

En effet $b\geq 1$ donc $2b×a\geq 2a>a$.

*E* possède donc un plus petit élément c'est à dire un multiple de *b* strictement supérieur à *a* tel que le multiple précédent soit inférieur ou égal à *a*.

Il existe donc un entier *q* tel que $qb\leq a<\left(q+1\right)b$.

Comme, $b\leq a$ on a : $b\leq a<\left(q+1\right)b$.

Et comme $b>0$, on a : $0<\left(q+1\right)b$ et donc $0<q$.

*q* est donc un entier naturel.

On peut poser $r=a-bq$.

Or *a*, *b* et *q* sont des entiers, donc *r* est entier.

Comme $qb\leq a$, on a $r\geq 0$ donc *r* est donc un entier naturel.

Et comme $a<\left(q+1\right)b$ on en déduit que $r<b$.

**Unicité :**

On suppose qu'il existe deux couples (*q* ; *r*) et (*q'* ; *r'*).

Donc $a=bq+r=bq^{'}+r'$.

Et donc : $b\left(q-q^{'}\right)=r^{'}-r$.

Comme $q-q'$ est entier, $r^{'}-r$ est un multiple de *b*.

On sait que $0\leq r<b$ et $0\leq r'<b$ donc $-b<-r\leq 0$ et $0\leq r'<b$ ,

donc $-b<r^{'}-r<b$.

Le seul multiple de *b* compris entre –*b* et *b* est 0, donc $r^{'}-r=0$ et donc $r^{'}=r$*.*

D'où $q=q'$.

Propriété : On peut étendre la propriété précédente au cas où $a$ est un entier relatif.

*- Admis -*

Méthode : Déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/bwS45UeOZrg**](https://youtu.be/bwS45UeOZrg)

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de –5000 par 17.

**Correction**

A l'aide de la calculatrice, on obtient :



Ainsi : 5000 = 17 x 294 + 2

Donc : –5000 = 17 x (–294) – 2

Le reste est un entier positif inférieur à 17.

Donc : –5000 = 17 x (–294) – 17 – 2 + 17

Soit : –5000 = 17 x (–295) + 15

D'où, le quotient est –295 et le reste est 15.

Méthode : Déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/fv5uhr8JP3U**](https://youtu.be/fv5uhr8JP3U)

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $5n+11$ par $2n+3$, avec $n$ entier naturel.

**Correction**

* Pour tout entier naturel $n$, on a : $5n+11=2\left(2n+3\right)+n+5$

On décompose $5n+11$ en $Q\left(2n+3\right)+R$.

On a choisi $Q=2$ car $2$ est le plus grand facteur entier tel que $5n+11\geq Q\left(2n+3\right)$. En effet, le produit du diviseur par le quotient ne doit pas dépasser le dividende, sinon le reste serait négatif !

La relation $5n+11=2\left(2n+3\right)+n+5$ est la division euclidienne de $5n+11$ par $2n+3$ à condition que $0\leq n+5<2n+3$, soit : $n>2$ ou encore $n\geq 3$.

Ainsi, pour $n\geq 3$, dans la division euclidienne de $5n+11$ par $2n+3$, le quotient est $2$ et le reste est $n+5$.

* Reste donc à traiter les cas $n=0, n=1$ et $n=2$

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$n$$ | $$5n+11$$ | $$2n+3$$ | Quotient | Reste |
| 0 | 11 | 3 | 3 | 2 |
| 1 | 16 | 5 | 3 | 1 |
| 2 | 21 | 7 | 3 | 0 |

Propriété : Soit un entier naturel $b$, tel que $b\geq 2$.

Alors, tout entier $a$ s’écrit sous l’une des formes suivantes :

$bq$ ou $bq+1$ ou $bq+2$ … ou $bq+(b-1)$, avec $q$ entier relatif.

Exemples pour comprendre :

- En effectuant la division euclidienne de $a$ par $5$, on a : $a=5q+r$, avec $0\leq r<5$.

Ainsi, $a$ peut s’écrire : $5q$ ou $5q+1$ ou $5q+2$ ou $5q+3$ ou $5q+4$.

- De même, $a$ peut s’écrire : $2q$ ou $2q+1$.

On retrouve ici, la notion de parité d’un nombre : un nombre est soit pair, soit impair.

Méthode : Effectuer une démonstration par disjonction des cas

 **Vidéo** [**https://youtu.be/AEkdYp0Dqso**](https://youtu.be/AEkdYp0Dqso)

Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

**Correction**

Le raisonnement par disjonction de cas consiste à décomposer la proposition que l'on veut démontrer en différents cas qui seront vérifiés successivement.

On veut démontrer ici une divisibilité par 3, il peut donc être pertinent de décomposer l’entier $n$ sous une des trois formes suivantes :

$n=3q$ ou $n=3q+1$ ou $n=3q+2$, avec $q$ entier relatif.

On a donc 3 cas possibles :

* Si $n=3q$ :

$n\left(n+5\right)\left(n-5\right)=3q(3q+5)(3q-5)$ donc $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

* Si $n=3q+1$ :

$n\left(n+5\right)\left(n-5\right)=(3q+1)(3q+1+5)(3q+1-5)$

$$ =\left(3q+1\right)\left(3q+6\right)\left(3q-4\right)$$

$ =3(3q+1)(q+2)(3q-4)$ donc $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

* Si $n=3q+2$ :

$n\left(n+5\right)\left(n-5\right)=(3q+2)(3q+2+5)(3q+2-5)$

$$ =\left(3q+2\right)\left(3q+7\right)\left(3q-3\right)$$

$ =3(3q+2)(3q+7)(q-1)$ donc $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

**Partie 3 : Congruences dans** $Z$

 1) Définition

Exemple :

On considère la suite de nombres : 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.

Si on prend deux quelconques de ces nombres, alors leur différence est divisible par 5.

Par exemple : 21 – 6 = 15 qui est divisible par 5.

On dit que 21 et 6 sont congrus modulo 5.

Définition : Soit $n$ un entier naturel non nul.

Deux entiers $a$ et $b$ sont congrus modulo $n$ lorsque $a-b$ est divisible par $n$.

On note $a≡b\left[n\right]$.

Propriété : Soit $n$ un entier naturel non nul.

Deux entiers $a$ et $b$ sont congrus modulo $n$, si et seulement si, la division euclidienne de $a$ par $n$ a le même reste que la division euclidienne de $b$ par $n$.

Démonstration :

- Si $r=r'$ :

$a-b=nq+r-nq^{'}-r'=n(q-q')$ donc $a-b$ est divisible par $n$ et donc $a≡b\left[n\right]$.

- Si $a$ et $b$ sont congrus modulo $n$ :

$$a-b=nq+r-nq^{'}-r^{'}=n\left(q-q^{'}\right)+r-r'$$

Donc $r-r^{'}=a-b-n(q-q')$

Comme $a≡b\left[n\right]$, $a-b$ est divisible par $n$et donc $r-r'$ est divisible par $n$*.*

Par ailleurs, $0\leq r<n$ et $0\leq r'<n$

Donc $-n<-r\leq 0$ et $0\leq r^{'}<n$

Et donc $-n<r'-r\leq n$.

$r-r'$ est un multiple de $n$ compris entre $–n$ et $n$ donc $r-r'=0$, soit $r=r'$*.*

Exemple : On a vu que $ 21≡6\left[5\right]$.

Les égalités euclidiennes 21 = 4 x 5 + 1 et 6 = 1 x 5 + 1 montrent que le reste de la division de 21 par 5 est égal au reste de la division de 6 par 5.

Méthode : Écrire avec des congruences

 **Vidéo** [**https://youtu.be/BTCsGN6xwXg**](https://youtu.be/BTCsGN6xwXg)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wdFNCnSfIgE**](https://youtu.be/wdFNCnSfIgE)

a) Compléter : $13≡…\left[5\right]$ $45≡…\left[3\right]$ $-8≡…\left[12\right]$

b) Démontrer que : $214≡25\left[9\right]$

**Correction**

a) – Les solutions sont multiples, la plus simple consisterait à écrire $13≡13\left[5\right]$ !

Ce n’est évidemment pas satisfaisant, on privilégiera la recherche d’un entier naturel $r$ tel que $13≡r\left[5\right]$ **avec** $0\leq r<5$ (en référence à la division euclidienne).

En effet, si $r$ est le reste de la division de 13 par 5, alors on a : $13≡r\left[5\right]$.

$13≡r\left[5\right]$ signifie que $13=r+5k$, soit $r=13-5k$, $k\in Z$.

On cherche donc un entier relatif $k$, tel que $0\leq 13-5k<5$.

En prenant $k=2$, on a : $r=13-5k=13-5×2=3$.

Ainsi : $13≡3\left[5\right]$.

– On cherche $r$, tel que $45≡r\left[3\right]$ et $0\leq r<3$.

$45≡r\left[3\right]$ signifie que $r=45-3k$, $k\in Z$.

Avec $k=15$, on trouve $r=0$.

Ainsi : $45≡0\left[3\right]$.

– On cherche $r$, tel que $-8≡r\left[12\right]$ et $0\leq r<12$.

$-8≡r\left[12\right]$ signifie que $r=-8-12k$, $k\in Z$.

Avec $k=-1$, on trouve $r=4$.

Ainsi : $-8≡4\left[12\right]$.

b) $214≡25\left[9\right]$ signifie qu’il existe un entier relatif $k$, tel que $214-25=9k$.

C’est vrai !

En effet, $k=21$ convient : $214-25=189=21×9.$

 2) Propriétés sur les congruences

Propriétés : Soit $n$ un entier naturel non nul.

a) $a≡a\left[n\right]$ pour tout entier relatif $a$.

b) Si $a≡b\left[n\right]$ et $b≡c\left[n\right]$ alors $a≡c\left[n\right]$ (Relation de transitivité)

Démonstration :

a) $a-a=0$ est divisible par $n$.

b) $a≡b\left[n\right]$ et $b≡c\left[n\right]$ donc $n$ divise $a-b$ et $b-c$ donc $n$ divise $a-b+b-c=a-c$.

Propriété (Opérations) : Soit $n$ un entier naturel non nul.

Soit $a$, $b$, $a'$ et $b'$ des nombres relatifs tels que $a≡b\left[n\right]$ et $a'≡b'\left[n\right]$ **alors** on a :

 - $ a+a^{'}≡b+b'\left[n\right]$

 - $ a-a^{'}≡b-b'\left[n\right]$

 - $ a×a^{'}≡b×b'\left[n\right]$

 - $ a^{p}≡b^{p}\left[n\right]$ avec $p\in N$.

On dit que l’addition, la soustraction et la multiplication sont compatibles avec les congruences.

Démonstration de la dernière relation :

* Initialisation : La démonstration est triviale pour $p$ = 0 ou $p$ = 1
* Hérédité :

 - Hypothèse de récurrence :

 Supposons qu'il existe un entier $k$ tel que la propriété soit vraie : $a^{k}≡b^{k}\left[n\right]$

 - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1 $: $a^{k+1}≡b^{k+1}\left[n\right]$.

$$a^{k+1}≡a^{k}×a≡b^{k}×b≡b^{k+1}\left[n\right]$$

* Conclusion :

La propriété est vraie pour $p$ = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $p$.

Exemples :

On a : $7≡4\left[3\right]$ et $11≡20\left[3\right]$ donc :

- $7+11≡4+20\left[3\right]≡24\left[3\right]≡0\left[3\right]$ et on a alors $18≡0\left[3\right]$

- $7×11≡4×20\left[3\right]≡80\left[3\right]≡2\left[3\right]$ et on a alors $77≡2\left[3\right]$

Attention la réciproque est fausse :

Si $k×a≡k×b\left[n\right]$, on n’a pas nécessairement $a≡b\left[n\right]$.

En effet, la division n’est pas compatible avec les congruences.

Par exemple :

Si $12≡18\left[6\right]$, mais $12:3≢18:3\left[6\right]$.

Méthode : Appliquer les propriétés sur les congruences

 **Vidéo** [**https://youtu.be/4RRjMC8\_Dio**](https://youtu.be/4RRjMC8_Dio)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a$$ | $$≡1\left[4\right]$$ | $$≡-1\left[7\right]$$ | $$≡1\left[10\right]$$ |
| $$b$$ | $$≡2\left[4\right]$$ | $$≡4\left[7\right]$$ | $$≡-5\left[10\right]$$ |
| $$a+b$$ | $$≡…\left[4\right]$$ | $$≡…\left[7\right]$$ | $$≡…\left[10\right]$$ |
| $$a-b$$ | $$≡…\left[4\right]$$ | $$≡…\left[7\right]$$ | $$≡…\left[10\right]$$ |
| $$a^{2}$$ | $$≡…\left[4\right]$$ | $$≡…\left[7\right]$$ | $$≡…\left[10\right]$$ |
| $$4b$$ | $$≡…\left[4\right]$$ | $$≡…\left[7\right]$$ | $$≡…\left[10\right]$$ |
| $$a^{2}+4b-6$$ | $$≡…\left[4\right]$$ | $$≡…\left[7\right]$$ | $$≡…\left[10\right]$$ |

Compléter le tableau :

**Correction**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a$$ | $$≡1\left[4\right]$$ | $$≡-1\left[7\right]$$ | $$≡1\left[10\right]$$ |
| $$b$$ | $$≡2\left[4\right]$$ | $$≡4\left[7\right]$$ | $$≡-5\left[10\right]$$ |
| $$a+b$$ | $$≡1+2\left[4\right]≡3\left[4\right]$$ | $$≡3\left[7\right]$$ | $$≡6\left[10\right]$$ |
| $$a-b$$ | $$≡1-2\left[4\right]≡-1\left[4\right]≡3\left[4\right]$$ | $$≡2\left[7\right]$$ | $$≡6\left[10\right]$$ |
| $$a^{2}$$ | $$≡1^{2}\left[4\right]≡1\left[4\right]$$ | $$≡1\left[7\right]$$ | $$≡1\left[10\right]$$ |
| $$4b$$ | $$≡4×2\left[4\right]≡8\left[4\right]≡0\left[4\right]$$ | $$≡2\left[7\right]$$ | $$≡0\left[10\right]$$ |
| $$a^{2}+4b-6$$ | $$≡1+0-6\left[4\right]≡-5\left[4\right]≡3\left[4\right]$$ | $$≡4\left[7\right]$$ | $$≡5\left[10\right]$$ |

3) Exemples d’application

Méthode : Résoudre une équation avec des congruences

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Hb39SqG6nbg**](https://youtu.be/Hb39SqG6nbg)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aTn05hp\_b7I**](https://youtu.be/aTn05hp_b7I)

a) Déterminer les entiers *x* tels que $6+x≡5\left[3\right]$

b) Déterminer les entiers *x* tels que $3x≡5\left[4\right]$

**Correction**

a) $6+x≡5\left[3\right]$

$$ 6+x-6≡5-6\left[3\right]$$

$$ x≡-1\left[3\right]$$

$$ x≡2\left[3\right]$$

Les entiers *x* solutions sont tous les entiers de la forme $2+3k$ avec $k\in Z$.

b) $3x≡5\left[4\right]$ donc $3x≡1\left[4\right]$

Or *x* est nécessairement congru à l'un des entiers 0, 1, 2 ou 3 modulo 4.

Par disjonction des cas, on a :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $x$ modulo 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $3x$ modulo 4 | 0 | 3 | 2 | 1 |

Donc $3×3≡1\left[4\right].$ On en déduit que $x≡3\left[4\right]$.

Les entiers *x* solutions sont tous les entiers de la forme $3+4k$ avec $k\in Z$.

Méthode : Démontrer une divisibilité à l’aide des congruences

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ZzlPFO59\_t0**](https://youtu.be/ZzlPFO59_t0)

Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

*On retrouve le même exercice (résolu ici à l’aide des congruences) que celui proposé dans la partie 2.*

**Correction**

On veut démontrer ici une divisibilité par 3, il peut donc être pertinent d’écrire $n$ à l’aide de modulo 3 :

$n≡0\left[3\right]$ ou $n≡1\left[3\right]$ ou $n≡2\left[3\right]$

On a donc 3 cas possibles, on va effectuer la démonstration par disjonction des cas en présentant les calculs dans un tableau :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$n≡0\left[3\right]$$ | $$n≡1\left[3\right]$$ | $$n≡2\left[3\right]$$ |
| $$n+5≡2\left[3\right]$$ | $$n+5≡0\left[3\right]$$ | $$n+5≡1\left[3\right]$$ |
| $$n-5≡1\left[3\right]$$ | $$n-5≡2\left[3\right]$$ | $$n-5≡0\left[3\right]$$ |
| $$n(n+5)(n-5) ≡0\left[3\right]$$ | $$n(n+5)(n-5) ≡0\left[3\right]$$ | $$n(n+5)(n-5) ≡0\left[3\right]$$ |

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

Méthode : Déterminer le reste d'une division euclidienne à l'aide de congruences

 **Vidéo** [**https://youtu.be/uVS-oeibDJ4**](https://youtu.be/uVS-oeibDJ4)

a) Déterminer le reste de la division de 2456 par 5.

b) Déterminer le reste de la division de 2437 par 7.

**Correction**

a) Toute puissance de 1 est égale à 1. On cherche donc à faire apparaitre une puissance de 2 qui est égale à 1 modulo 5.

On choisit alors de décomposer 456 à l'aide du facteur 4 car $2^{4}≡16≡1\left[5\right]$.

$$2^{456}≡2^{4×114}\left[5\right]$$

$$ ≡\left(2^{4}\right)^{114}\left[5\right]$$

On applique la formule de congruence des puissances : $\left(2^{4}\right)^{114}≡1^{114}\left[5\right]$

$$2^{456}≡1^{114}\left[5\right]$$

$$ ≡1\left[5\right]$$

Le reste est égal à 1.

b) On cherche donc une puissance de 2 qui est égale à 1 modulo 7.

On choisit alors de décomposer 437 à l'aide du facteur 3 car $2^{3}≡8≡1\left[7\right]$.

$$2^{437}≡2^{3×145+2}\left[7\right]$$

$$ ≡\left(2^{3}\right)^{145}×2^{2}\left[7\right]$$

$$ ≡1^{145}×4\left[7\right]$$

$$ ≡4\left[7\right]$$

Le reste est égal à 4.

**Étude d’un problème de chiffrement : Appliquer un codage (Cryptographie) :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/GC7lFz4WGsc**](https://youtu.be/GC7lFz4WGsc)

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)