CONTINUITÉ DES FONCTIONS

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/9SSEUoyHh2s**](https://youtu.be/9SSEUoyHh2s)

**Partie 1 : Notion de continuité**

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

1) Définition

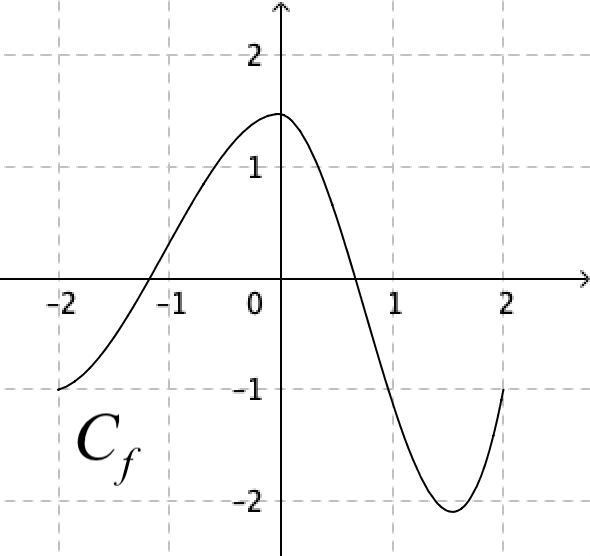
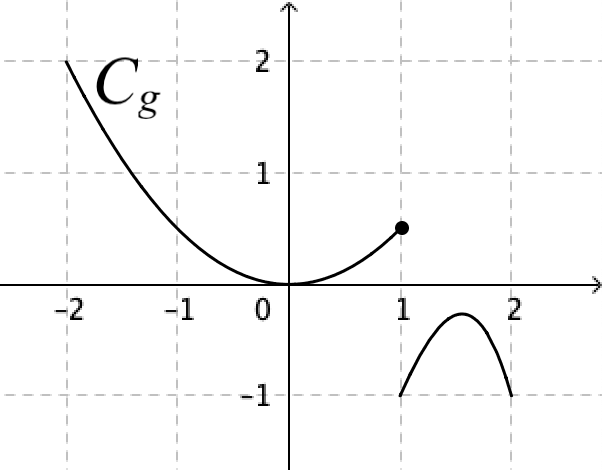
Définition intuitive :

Une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Méthode : Reconnaître graphiquement une fonction continue

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XpjKserte6o**](https://youtu.be/XpjKserte6o)

Étudier graphiquement la continuité des fonctions et définies et représentées ci-dessous sur l’intervalle .

**Correction**

● La courbe de la fonction peut se tracer sans lever le crayon, elle semble donc continue sur l’intervalle .

● La courbe de la fonction ne peut pas se tracer sans lever le crayon, elle n’est donc pas continue sur l’intervalle .

Cependant, elle semble continue sur et sur .

Définition : Soit une fonction définie sur un intervalle contenant un réel .

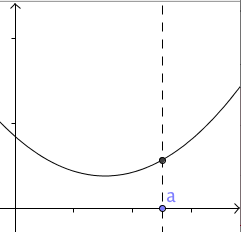
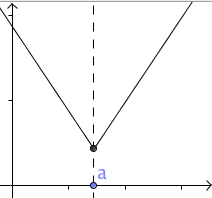
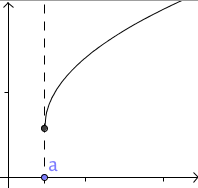
*-*  est continue en si : .

*-*  est continue sur si est continue en tout point de .

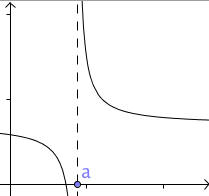
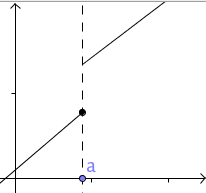
Théorème : Si une fonction est dérivable sur un intervalle , alors elle est continue sur cet intervalle.

*- Admis -*

Exemples et contre-exemples :

est continue en a est continue en a est continue en a

n'est pas continue en a n'est pas continue en a

2) Cas des fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont continues sur l’intervalle donné.

|  |  |
| --- | --- |
| Fonction | Intervalle |
|  | ℝ |
| () | ℝ |
| Polynôme | ℝ |
|  | ℝ |
|  |  |
|  | et |
|  | ℝ |
|  | ℝ |

3) Opérations sur les fonctions continues :

Propriétés :

et sont deux fonctions continues sur un intervalle .

● , , () et sont continues sur .

● Si ne s’annule pas sur , alors est continue sur .

● Si est positive sur , alors est continue sur .

Remarque : Dans la pratique, les flèches obliques d’un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l’intervalle considéré.

Méthode : Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

 **Vidéo** [**https://youtu.be/03WMLyc7rLE**](https://youtu.be/03WMLyc7rLE)

On considère la fonction définie sur ℝ par

La fonction est-elle continue sur ℝ ?

**Correction**

Les fonctions , et sont des fonctions polynômes donc continues sur ℝ.

Ainsi la fonction est continue sur , sur et sur .

Étudions alors la continuité de en 3 et en 5 :

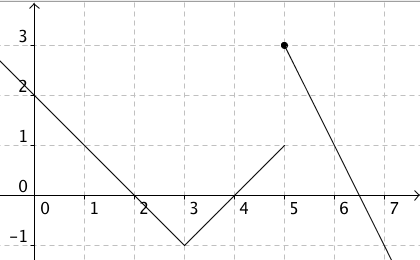
-

Donc :

Et donc la fonction est continue en 3.

-

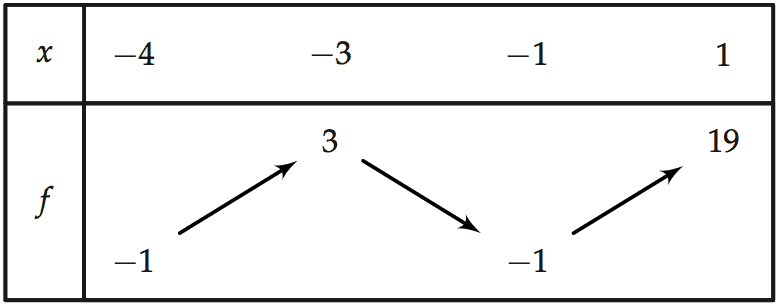
La limite de en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

La fonction n'est donc pas continue en 5.

La fonction est continue sur et sur .

En représentant la fonction , on peut observer graphiquement le résultat précédent.

**Partie 2 : Théorème des valeurs intermédiaires**

Exemple :

On donne le tableau de variations de la fonction .

Il est possible de lire dans le tableau, le nombre de solutions éventuelles pour des équations du type .

● L’équation possède 1 solution comprise dans l’intervalle

● L’équation possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles et

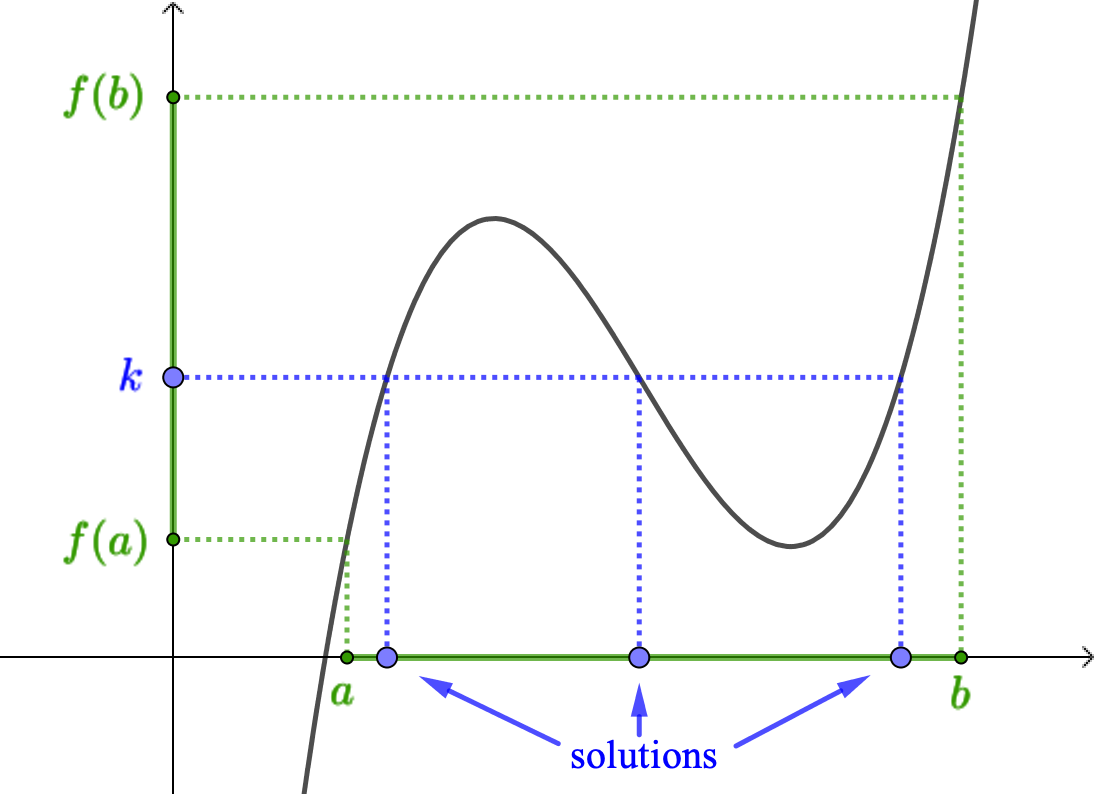
● L’équation ne possède pas de solution.

● L’équation possède 2 solutions : l’une égale à , l’autre comprise dans l’intervalle

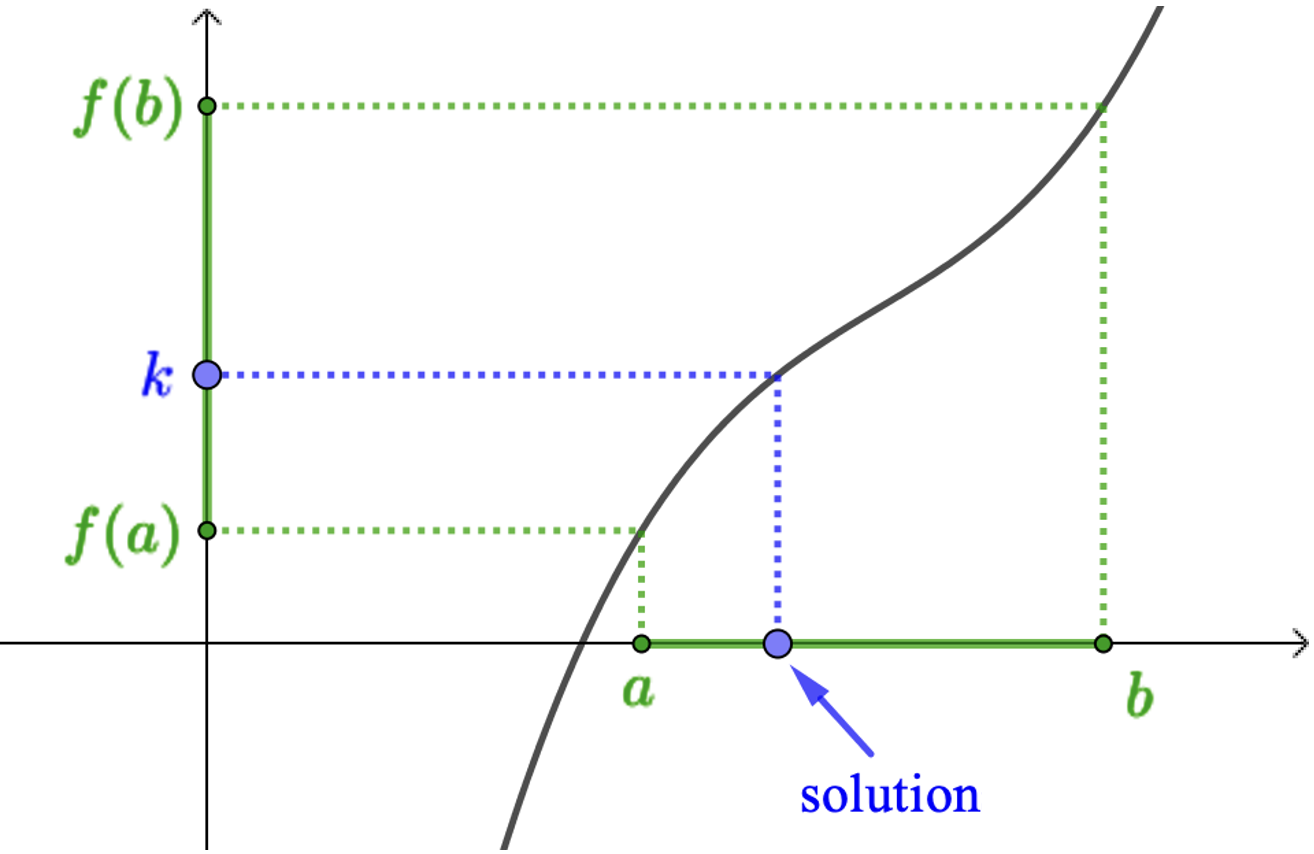
Théorème des valeurs intermédiaires :

● On considère la fonction **continue** sur l’intervalle .

Pour tout réel compris entre et , l’équation admet au moins une solution comprise entre et .



● Dans le cas où la fonction est **strictement monotone** sur l'intervalle alors la solution est unique.



*- Admis -*

**Dans la pratique :**

Pour démontrer que l’équation admet une unique solution sur l'intervalle , on démontre que :

1. est **continue** sur ,

2. **change de signe** sur ,

3. est **strictement monotone** sur ,

Les conditions 1 et 2 nous assurent que des solutions existent.

Avec la condition 3 en plus, nous savons que la solution est unique.

Méthode : Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (1)

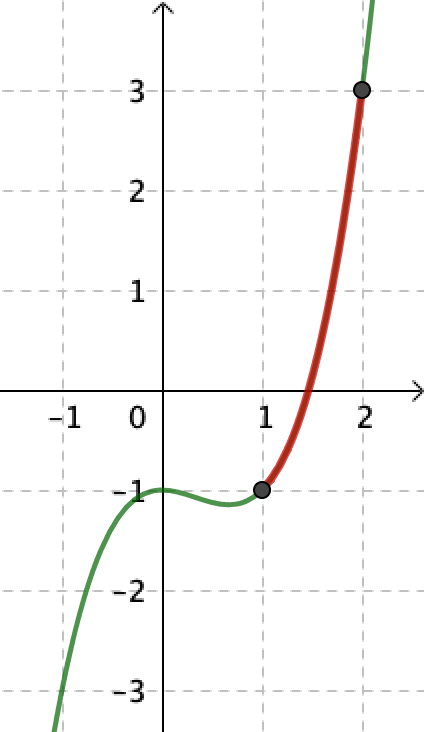
 **Vidéo** [**https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y**](https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y)

On considère la fonction définie sur ℝ par .

1) Démontrer que l'équation admet une unique solution sur l'intervalle .

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution .

**Correction**



1) • La fonction est **continue** sur l'intervalle , car une fonction polynôme est continue sur .

•

Donc la fonction **change de signe** sur l'intervalle .

•

Donc, pour tout de , .

La fonction *f* est donc **strictement croissante** sur l'intervalle .

➡︎ D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l’équation admet alors une unique solution sur l’intervalle .

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des « balayages » successifs en augmentant la précision.

 **Vidéo TI** [**https://youtu.be/MEkh0fxPakk**](https://youtu.be/MEkh0fxPakk)

 **Vidéo Casio** [**https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ**](https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ)

 **Vidéo HP** [**https://youtu.be/93mBoNOpEWg**](https://youtu.be/93mBoNOpEWg)

Une image contenant texte, mots croisés

Description générée automatiquement

● La solution est comprise entre 1,4 et 1,5.

En effet :

Une image contenant texte, mots croisés

Description générée automatiquement

● La solution est comprise entre 1,46 et 1,47.

En effet :

On en déduit que : .

Remarque :

Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie :

[*http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo\_SolEqua.pdf*](http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_SolEqua.pdf)

Méthode : Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/UmGQf7gkvLg**](https://youtu.be/UmGQf7gkvLg)

On considère la fonction définie sur par .

Démontrer que l’équation admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

**Correction**

● est **continue** sur [–1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur .

●

Donc **2 est compris entre et .**

➡︎ D’après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l’équation admet au moins une solution sur l’intervalle [–1 ; 4].

Remarque : Ici, on n’a pas la stricte monotonie de , donc on n’a pas l’unicité de la solution.

**Partie 3 : Application à l’étude de suites**

Théorème :  
Soit une fonction  continue sur un intervalle et soit une suite telle que pour tout *,* on a :  et .   
Si converge vers alors .

- Admis -

Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence du type

 **Vidéo** [**https://youtu.be/L7bBL4z-r90**](https://youtu.be/L7bBL4z-r90)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/LDRx7aS9JsA**](https://youtu.be/LDRx7aS9JsA)

Soit la suite définie par et pour tout entier naturel , .

1) Dans un repère orthonormé, on considère la fonction définie par

a) Tracer les droites d’équations respectives et .  
 b) Dans ce repère, placer sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe , et . On laissera apparent les traits de construction.  
 c) À l’aide du graphique, conjecturer la limite de la suite

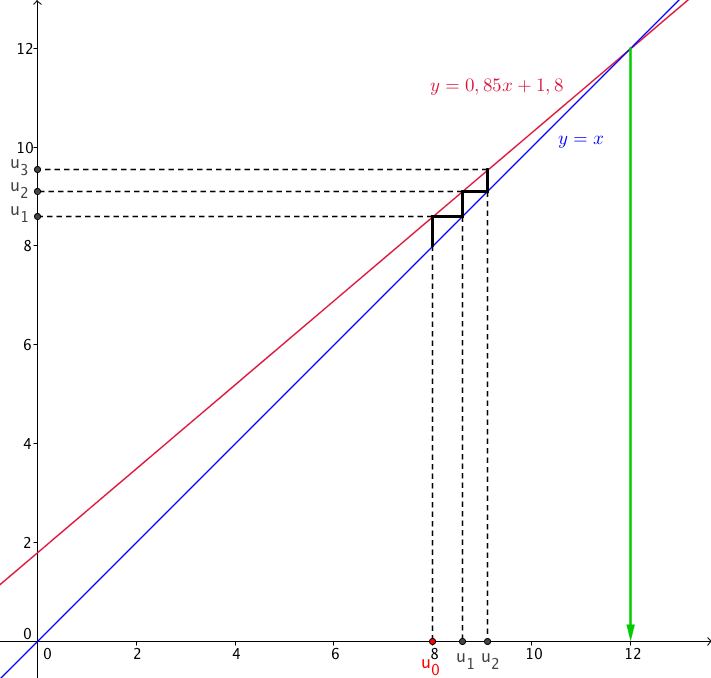
2) En supposant que la suite est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

**Correction**

1) a) b) - On place le premier terme sur l’axe des abscisses. On trace l’image de

par pour obtenir sur l’axe des ordonnées .  
- On reporte sur l’axe des abscisses à l’aide de la droite d’équation .

- On fait de même pour obtenir puis …



c) En continuant le tracé en escalier, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l’intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite est 12.

2) La suite converge et la fonction est continue sur . La limite de la suite est donc solution de l’équation

Soit :

La suite converge vers 12.

**Afficher la représentation graphique en escalier sur la calculatrice :**

 **Vidéo TI** [**https://youtu.be/bRlvVs9KZuk**](https://youtu.be/bRlvVs9KZuk)

 **Vidéo Casio** [**https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ**](https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ)

 **Vidéo HP** [**https://youtu.be/wML003kdLRo**](https://youtu.be/wML003kdLRo)



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)