CONTINUITÉ DES FONCTIONS

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/9SSEUoyHh2s**](https://youtu.be/9SSEUoyHh2s)

**Partie 1 : Notion de continuité**

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

 1) Définition

Définition intuitive :

Une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Méthode : Reconnaître graphiquement une fonction continue

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XpjKserte6o**](https://youtu.be/XpjKserte6o)

Étudier graphiquement la continuité des fonctions $f$ et $g$ définies et représentées ci-dessous sur l’intervalle $\left[-2 ;2\right]$.

 

**Correction**

● La courbe de la fonction $f$ peut se tracer sans lever le crayon, elle semble donc continue sur l’intervalle $\left[-2 ;2\right]$.

● La courbe de la fonction $g$ ne peut pas se tracer sans lever le crayon, elle n’est donc pas continue sur l’intervalle $\left[-2 ;2\right]$.

Cependant, elle semble continue sur $\left[-2 ;1\right]$ et sur $\left]1 ;2\right]$.

Définition : Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ contenant un réel $a$.

*-* $f$ est continue en $a$ si : $\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=f(a)$.

*-* $f$ est continue sur $I$ si $f$ est continue en tout point de $I$.

Théorème : Si une fonction est dérivable sur un intervalle $I$, alors elle est continue sur cet intervalle.

*- Admis -*

Exemples et contre-exemples :

  

$f$ est continue en a $f$ est continue en a $f$ est continue en a

 

$f$ n'est pas continue en a $f$ n'est pas continue en a

 2) Cas des fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont continues sur l’intervalle donné.

|  |  |
| --- | --- |
| Fonction | Intervalle |
| $$\left|x\right|$$ | ℝ |
| $x^{n}$ ($n\in N$) | ℝ |
| Polynôme | ℝ |
| $$e^{x}$$ | ℝ |
| $$\sqrt{x}$$ | $$\left[0 ; +\infty \right[$$ |
| $$\frac{1}{x}$$ | $\left]-\infty ;0\right[$  et $\left]0 ;+\infty \right[$ |
| $$\sin(x)$$ | ℝ |
| $$\cos(x)$$ | ℝ |

 3) Opérations sur les fonctions continues :

Propriétés :

$f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $I$.

 ● $f+g$, $f×g$, $f^{n}$ ($n\in N$) et $e^{f}$ sont continues sur $I$.

 ● Si $g$ ne s’annule pas sur $I$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur $I$.

 ● Si $f$ est positive sur $I$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur $I$.

Remarque : Dans la pratique, les flèches obliques d’un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l’intervalle considéré.

Méthode : Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

 **Vidéo** [**https://youtu.be/03WMLyc7rLE**](https://youtu.be/03WMLyc7rLE)

On considère la fonction $f$ définie sur ℝ par $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}-x+2, pour x<3. \\x-4, pour 3\leq x<5\\-2x+13, pour x\geq 5\end{array}\right.$

La fonction $f$ est-elle continue sur ℝ ?

**Correction**

Les fonctions $x⟼-x+2$, $x⟼x-4$ et $x⟼-2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur ℝ.

Ainsi la fonction $f$ est continue sur $\left]-\infty ;3\right[$, sur $\left[3 ; 5\right[$ et sur $\left[5 ; +\infty \right[$.

Étudions alors la continuité de $f$ en 3 et en 5 :

- $\lim\_{x\to 3^{-}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 3^{-}}-x+2=-3+2=-1$

 $\lim\_{x\to 3^{+}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 3^{+}}x-4=3-4=-1$

Donc : $\lim\_{x\to 3^{-}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 3^{+}}f\left(x\right)=f(3)$

Et donc la fonction $f$ est continue en 3.

- $\lim\_{x\to 5^{-}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 5^{-}}x-4=5-4=1$

$$\lim\_{x\to 5^{+}}f\left(x\right)=\lim\_{x\to 5^{+}}-2x+13=-2×5+13=3$$

La limite de $f$ en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

La fonction $f$ n'est donc pas continue en 5.

La fonction $f$ est continue sur $\left]-\infty ;5\right[$ et sur $\left[5 ; +\infty \right[$.

En représentant la fonction $f$, on peut observer graphiquement le résultat précédent.

**Partie 2 : Théorème des valeurs intermédiaires**

Exemple :

On donne le tableau de variations de la fonction $f$.

Il est possible de lire dans le tableau, le nombre de solutions éventuelles pour des équations du type $f\left(x\right)=k$.

● L’équation $f\left(x\right)=18$ possède 1 solution comprise dans l’intervalle $\left]-1 ;1\right[.$

● L’équation $f\left(x\right)=0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $\left]-4 ;-3\right[, \left]-3 ;-1\right[$ et $\left]-1 ;1\right[.$

● L’équation $f\left(x\right)=-3$ ne possède pas de solution.

● L’équation $f\left(x\right)=3 $possède 2 solutions : l’une égale à $-3$, l’autre comprise dans l’intervalle $\left]-1 ;1\right[.$

Théorème des valeurs intermédiaires :

● On considère la fonction $f$ **continue** sur l’intervalle $[a ;b]$.

Pour tout réel $k$ compris entre $f(a) $et $f(b)$, l’équation $f\left(x\right)=k$ admet au moins une solution comprise entre $a$ et $b$.



● Dans le cas où la fonction $f$ est **strictement monotone** sur l'intervalle $\left[a ;b\right],$ alors la solution est unique.



*- Admis -*

**Dans la pratique :**

Pour démontrer que l’équation $f\left(x\right)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a ;b]$, on démontre que :

 1.$f$ est **continue** sur $[a ;b]$,

 2. $f$ **change de signe** sur $[a ;b]$,

 3. $f$ est **strictement monotone** sur $[a ;b]$,

Les conditions 1 et 2 nous assurent que des solutions existent.

Avec la condition 3 en plus, nous savons que la solution est unique.

Méthode : Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y**](https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y)

On considère la fonction $f$ définie sur ℝ par $f\left(x\right)=x^{3}-x^{2}-1$.

1) Démontrer que l'équation $f\left(x\right)=0$ admet une unique solution $α$ sur l'intervalle $\left[1 ;2\right]$.

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution $α$.

**Correction**



1) • La fonction $f$ est **continue** sur l'intervalle $\left[1 ;2\right]$, car une fonction polynôme est continue sur $R$.

• $f\left(1\right)=1^{3}-1^{2}-1=-1<0$

 $f\left(2\right)=2^{3}-2^{2}-1=3>0$

Donc la fonction $f$ **change de signe** sur l'intervalle $\left[1 ;2\right]$.

• $f^{'}\left(x\right)=3x^{2}-2x=x(3x-2)$

Donc, pour tout $x$ de $\left[1 ;2\right]$, $f^{'}\left(x\right)>0$.

La fonction *f* est donc **strictement croissante** sur l'intervalle $\left[1 ;2\right]$.

 ➡︎ D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l’équation $f\left(x\right)=0$ admet alors une unique solution sur l’intervalle $\left[1 ;2\right]$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des « balayages » successifs en augmentant la précision.

 **Vidéo TI** [**https://youtu.be/MEkh0fxPakk**](https://youtu.be/MEkh0fxPakk)

 **Vidéo Casio** [**https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ**](https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ)

 **Vidéo HP** [**https://youtu.be/93mBoNOpEWg**](https://youtu.be/93mBoNOpEWg)



● La solution est comprise entre 1,4 et 1,5.

En effet : $f\left(1,4\right)≈-0,216<0$

 $f\left(1,5\right)≈0,125>0$



● La solution est comprise entre 1,46 et 1,47.

En effet : $f\left(1,46\right)≈-0,019<0$

 $f\left(1,47\right)≈0,0156>0$

On en déduit que : $1,46<α<1,47$.

Remarque :

Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie :

[*http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo\_SolEqua.pdf*](http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_SolEqua.pdf)

Méthode : Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/UmGQf7gkvLg**](https://youtu.be/UmGQf7gkvLg)

On considère la fonction $f$ définie sur $R$ par $f\left(x\right)=x^{3}-4x^{2}+6$.

Démontrer que l’équation $f\left(x\right)=2$ admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

**Correction**

● $f$ est **continue** sur [–1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur $R$.

● $f\left(-1\right)=\left(-1\right)^{3}-4\left(-1\right)^{2}+6=1$

$$ f\left(4\right)=4^{3}-4×4^{2}+6=6$$

Donc **2 est compris entre** $f\left(-1\right)$ **et** $f\left(4\right)$**.**

 ➡︎ D’après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l’équation $f\left(x\right)=2$ admet au moins une solution sur l’intervalle [–1 ; 4].

Remarque : Ici, on n’a pas la stricte monotonie de $f$, donc on n’a pas l’unicité de la solution.

**Partie 3 : Application à l’étude de suites**

Théorème :
Soit une fonction $f$ continue sur un intervalle $I$ et soit une suite $(u\_{n})$ telle que pour tout $n$*,* on a : $u\_{n}\in I$ et $u\_{n+1}=f\left(u\_{n}\right)$.
Si $(u\_{n})$ converge vers $L$ alors $f\left(L\right)=L$.

- Admis -

Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence du type $u\_{n+1}=f(u\_{n})$

 **Vidéo** [**https://youtu.be/L7bBL4z-r90**](https://youtu.be/L7bBL4z-r90)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/LDRx7aS9JsA**](https://youtu.be/LDRx7aS9JsA)

Soit $(u\_{n})$ la suite définie par $u\_{0}=8$ et pour tout entier naturel $n$, $u\_{n+1}=0,85u\_{n}+1,8$.

1) Dans un repère orthonormé, on considère la fonction $f $définie par

$f\left(x\right)=0,85x+1,8.$

 a) Tracer les droites d’équations respectives $y=0,85x+1,8$ et $y=x$.
 b) Dans ce repère, placer $u\_{0}$ sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe $u\_{1}$, $u\_{2} $et $u\_{3}$. On laissera apparent les traits de construction.
 c) À l’aide du graphique, conjecturer la limite de la suite $(u\_{n}).$

2) En supposant que la suite $(u\_{n})$ est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

**Correction**

1) a) b) - On place le premier terme $u\_{0}$sur l’axe des abscisses. On trace l’image de

$u\_{0}$ par $f$ pour obtenir sur l’axe des ordonnées $u\_{1}=f\left(u\_{0}\right)$.
- On reporte $u\_{1}$ sur l’axe des abscisses à l’aide de la droite d’équation $y=x$.

- On fait de même pour obtenir $u\_{2}$puis $u\_{3}$…



c) En continuant le tracé en escalier, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l’intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite $(u\_{n})$ est 12.

2) La suite $(u\_{n})$ converge et la fonction $f$ est continue sur $R$. La limite $L$ de la suite $(u\_{n})$ est donc solution de l’équation $f\left(L\right)=L.$

Soit : $0,85L+1,8=L$

$$L-0,85L=1,8$$

$$0,15L=1,8$$

$$L=1,8 :0,15=12$$

La suite $(u\_{n})$ converge vers 12.

**Afficher la représentation graphique en escalier sur la calculatrice :**

 **Vidéo TI** [**https://youtu.be/bRlvVs9KZuk**](https://youtu.be/bRlvVs9KZuk)

 **Vidéo Casio** [**https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ**](https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ)

 **Vidéo HP** [**https://youtu.be/wML003kdLRo**](https://youtu.be/wML003kdLRo)

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)