FONCTION INVERSE

**Partie 1 : Définition et allure de la courbe**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Vl2rlbFF22Y**](https://youtu.be/Vl2rlbFF22Y)

### 1) Définition

Définition : La **fonction inverse** $f$est définie sur $R\\left\{0\right\}$ par $f\left(x\right)=$ $\frac{1}{x}$.

### 2) Représentation graphique

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x$$ | –2 | –1 | 0,25 | 1 | 2 | 3 |
| $$f(x)$$ | –0,5 | –1 | 4 | 1 | 0,5 |  |



Remarque : La courbe d’équation $y=$ $\frac{1}{x}$ de la fonction inverse, appelée **hyperbole** de centre O, est symétrique par rapport à l’origine.

**Partie 2 : Dérivée et sens de variation**

### 1) Dérivée

Propriété : La dérivée de la fonction inverse$f$est définie sur $R\\left\{0\right\}$ par $f^{'}\left(x\right)=-$ $\frac{1}{x^{2}}$.

Démonstration (pour les experts) :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk**](https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk)

$\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}$ = $\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$ = $\frac{\frac{a-a-h}{a\left(a+h\right)}}{h}$ = $\frac{\frac{-h}{a\left(a+h\right)}}{h}$ = $-$ $\frac{1}{a\left(a+h\right)}$

Or : $\lim\_{h\to 0}\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}$ = $\lim\_{h\to 0}\left(- \frac{1}{a\left(a+h\right)}\right)$ = $-$ $\frac{1}{a^{2}}$

Pour tout nombre $a$, on associe le nombre dérivé de la fonction $f$ égal à $–$ $\frac{1}{a^{2}}$.

Ainsi, pour tout $x$ de $R\{0\}$, on a : $f^{'}(x)=$ $-\frac{1}{x^{2}}$.

### 2) Variations

Propriété : La fonction inverse est décroissante sur $\left]-\infty  ;0\right[ $ et sur $\left]0 ; +\infty \right[$.

Démonstration :

### Pour tout $x$ de $R\\left\{0\right\}$, $f^{'}\left(x\right)=-$ $\frac{1}{x^{2}}$ < 0.

Donc $f$ est décroissante sur $\left]-\infty  ;0\right[ $ et sur $\left]0 ; +\infty \right[$.

**Partie 3 : Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition**

 1) En $+\infty $

On s'intéresse aux valeurs de $f\left(x\right)$ lorsque *x* devient de plus en plus grand.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 5 | 10 | 100 | 10000 | … |
| $$f\left(x\right)$$ | 0,2 | 0,1 | 0,01 | 0,0001 | ? |

On constate que $f\left(x\right)$ se rapproche de 0 lorsque *x* devient de plus en plus grand.

On dit que la limite de *f* lorsque *x* tend vers $+\infty $ est égale à 0 et on note :

$\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=0$.

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus grandes, la courbe de $f$ se rapproche de plus en plus de l’axe des abscisses.

 2) En $-\infty $

On s'intéresse aux valeurs de $f\left(x\right)$ lorsque *x* devient de plus en plus « grand dans les négatifs »

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | … | -10000 | -100 | -10 | -5 |
| $$f\left(x\right)$$ | ? | -0,0001 | -0,01 | -0,1 | -0,2 |

On constate que $f\left(x\right)$ se rapproche de 0 lorsque *x* devient de plus en plus « grand dans les négatifs ».

On dit que la limite de $f$ lorsque $x$ tend vers $-\infty $ est égale à 0 et on note :

$\lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)=0$.



Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus « grandes dans les négatifs », la courbe de $f$ se rapproche de plus en plus de l’axe des abscisses.

On dit que l’axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en $-\infty $ et en $+\infty $.

 3) Au voisinage de 0

L'image de 0 par la fonction $f$ n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f\left(x\right)$ lorsque *x* se rapproche de 0.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | -0,5 | -0,1 | -0,01 | -0,001 | … | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 0,5 |
| $$f\left(x\right)$$ | -2 | -10 | -100 | -1000 | ? | 1000 | 100 | 10 | 2 |



A l'aide de la calculatrice, on constate que :

- Pour $x>0$ : $f\left(x\right)$ devient de plus en plus grand lorsque $x$ se rapproche de 0.

On dit que la limite de $f$ lorsque $x$ tend vers 0 pour $x>0$ est égale à $+\infty $ et on note :

 $\lim\_{\begin{array}{c}x\to 0\\x>0\end{array}}f\left(x\right)=+\infty $.

Graphiquement, pour des valeurs positives, de plus en plus en proches de 0, la courbe de $f$ se rapproche de plus en plus de l’axe des ordonnées.



- Pour $x<0$ : $f\left(x\right)$ devient de plus en plus « grand dans les négatifs » lorsque $x$ se rapproche de 0.

On dit que la limite de $f$ lorsque $x$ tend vers 0 pour $x<0$ est égale à $-\infty $ et on note :

 $\lim\_{\begin{array}{c}x\to 0\\x<0\end{array}}f\left(x\right)=-\infty $.

Graphiquement, pour des valeurs négatives, de plus en plus en proches de 0, la courbe de $f$ se rapproche de plus en plus de l’axe des ordonnées.

On dit que l’axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse.

Rappels sur les formules de dérivation :

|  |
| --- |
| $$\left(f+g\right)'=f'+g'$$ |
| $$\left(kf\right)^{'}=kf^{'} a\in R$$ |

|  |  |
| --- | --- |
| Fonction *f* | Dérivée *f* ' |
| $f\left(x\right)=a$, $a\in R$ | $$f'\left(x\right)=0$$ |
| $f\left(x\right)=ax$, $a\in R$ | $$f'\left(x\right)=a$$ |
| $$f\left(x\right)=x^{2}$$ | $$f'\left(x\right)=2x$$ |
| $$f\left(x\right)=x^{3}$$ | $$f'\left(x\right)=3x^{2}$$ |

- Si $f'(x)\leq 0$, alors $f$ est décroissante.

- Si $f'(x)\geq 0$, alors $f$ est croissante.

Méthode : Étudier une fonction obtenue par combinaisons linéaires de la fonction inverse et d’une fonction polynomiale

 **Vidéo** [**https://youtu.be/P3Ui9-Pk8p8**](https://youtu.be/P3Ui9-Pk8p8)

Soit la fonction $f$ définie sur $R∖\left\{0\right\}$ par$ f\left(x\right)=1-2x-$ $\frac{2}{x}$

1) Calculer la fonction dérivée de $f$.

2) Déterminer le signe de $f'$ en fonction de $x$.

3) Dresser le tableau de variations de $f$.

4) Représenter la fonction $f$ dans un repère.

**Correction**

1) On a : $f\left(x\right)=1-2x-2×$ $\frac{1}{x}$

 Donc : $f^{'}\left(x\right)=-2-$ $2×$ $\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)$

 $=-2+$ $\frac{2}{x^{2}}$

 $=\frac{-2x^{2}}{x^{2}}+$ $\frac{2}{x^{2}}$

 $=$ $\frac{2-2x^{2}}{x^{2}}$

2) On commence par résoudre l’équation $f^{'}(x)=0$.

Soit : $2-2x^{2}=0$

Donc : $2=2x^{2}$

Soit : $x^{2}=1$

Et donc : $x=1$ ou $x=-1$.



$f'$ est du signe du numérateur car le dénominateur est positif.

Le numérateur est une fonction du second degré représentée par une parabole sont les branches sont tournées vers le bas ($a=-2$ est négatif).

Elle est donc d’abord négative (avant $x=-1$) puis positive (entre $x=-1$ et $x=1$) et à nouveau négative (après $x=1$).

3) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :



En effet : $f\left(-1\right)=1-2×\left(-1\right)-$ $\frac{2}{-1}=5$

$ f\left(1\right)=1-2×1-$ $\frac{2}{1}=-3$

4) En testant, pour des valeurs négatives de plus en plus en proches de 0, $f\left(x\right)$ devient de plus en plus grand. Pour des valeurs positives, $f\left(x\right)$ devient de plus en plus « grand dans les négatifs ».

L’axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de la fonction $f$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)