FONCTIONS EXPONENTIELLES



**Partie 1 : Définition et propriété**

 1) Définition

On considère la suite géométrique de raison $a$ définie par $u\_{n}=a^{n}$.

Elle est définie pour tout entier naturel $n$.

En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base $a$.

Ainsi par exemple :

Pour une suite géométrique de raison

$a=2$ et de premier terme 1, on a par exemple : $u\_{4}=2^{4}$.

Pour la fonction correspondante, on a :

$f\left(4\right)=2^{4}$ mais on a également :

$f\left(1,3\right)=2^{1,3}$.

Et de façon générale, $f\left(x\right)=2^{x}$ pour tout réel $x$ positif.

La fonction $f$ est appelée fonction exponentielle de base 2.

Propriété : $a^{-x}=\frac{1}{a^{x}}$

L’ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de $x$ négatives.

Définition : La fonction $x⟼a^{x}$ définie sur $R$, avec $a>0$, s'appelle **fonction exponentielle de base** $a$.

Exemple :

La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur $R$ par $x⟼1,2^{x}$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle.

Propriété : La fonction exponentielle de base $a$ est strictement positive sur ℝ.

 2) Propriétés

Propriétés :

a) $a^{0}=1$ et $a^{1}=a $b) $a^{x+y}=a^{x}×a^{y}$

c) $a^{x-y}=\frac{a^{x}}{a^{y}}$ d) $\left(a^{x}\right)^{n}=a^{nx}$, avec $n$ un entier relatif.

Méthode : Simplifier une expression

 **Vidéo** [**https://youtu.be/PHTOZid0kzM**](https://youtu.be/PHTOZid0kzM)

Simplifier les expressions suivantes :

$$A=4^{-3}×4^{-5} B=\frac{3^{3}×3^{-2,5}}{9^{5}} C=\left(4,8^{-2,1}\right)^{3}×4,8^{6,2}$$

**Correction**

$$A=4^{-3}×4^{-5} B=\frac{3^{3}×3^{-2,5}}{9^{5}} C=\left(4,8^{-2,1}\right)^{3}×4,8^{6,2}$$

$$A=4^{-3+(-5)} B=\frac{3^{3}×3^{-2,5}}{(3^{2})^{5}} C=4,8^{-2,1×3}×4,8^{6,2}$$

$$A=4^{-8} B=\frac{3^{3-2,5}}{3^{2×5}} C=4,8^{-6,3}×4,8^{6,2}$$

$$ B=\frac{3^{0,5}}{3^{10}} C=4,8^{-6,3+6,2}$$

$$ B=3^{0,5-10} C=4,8^{-0,1}$$

$$ B=3^{-9,5} $$

**Partie 2 : Variations de la fonction exponentielle**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YQoR7CFM\_1U**](https://youtu.be/YQoR7CFM_1U)

|  |  |
| --- | --- |
| $$0<a<1$$ | $$a>1$$ |
| $x⟼a^{x} $est décroissante sur $R$ | $x⟼a^{x}$ est croissante sur $R$ |
| Capture d’écran 2012-05-21 à 16 | Capture d’écran 2012-05-21 à 16 |

Remarques :

* On retrouve les résultats établis pour la variation des suites géométriques.
* Si $a=1$ alors la fonction exponentielle est constante. En effet, dans ce cas,

$$a^{x}=1^{x}=1$$

* Quel que soit $a$, la fonction exponentielle passe par le point (0 ; 1). En effet, $a^{0}=1$.

Méthode : Utiliser une fonction exponentielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/maK64g-y3gA**](https://youtu.be/maK64g-y3gA)

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction $f$ définie sur [0 ; 10] par :$ f\left(x\right)=50000×1,15^{x}$.

a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.

b) Déterminer les variations de $f$ sur [0 ; 10].

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

**Correction**



a) $f\left(3\right)=50000×1,15^{3}≈76000$

 $f\left(5,5\right)=50000×1,15^{5,5}≈108000$

b) $a=1,15>1$ donc la fonction $x⟼1,15^{x}$ est strictement croissante sur [0 ; 10].

Il en est de même pour la fonction $f$.



c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de $100000$ bactéries, soit au bout d'environ 5h.

**Partie 3 : Taux d’évolution moyen**

Propriété :

Si $x^{n}=a$ alors $x=a^{\frac{1}{n}}$

Méthode : Calculer un taux d’évolution moyen

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8ocIhl-SFuQ**](https://youtu.be/8ocIhl-SFuQ)

Entre 2012 et 2015, le prix du gaz a augmenté de 25 %. Calculer le taux d’évolution moyen annuel.

**Correction**

On note *t* le taux d’évolution moyen annuel.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur un an** est égal à :

$$1+\frac{t}{100}$$

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur trois ans** (de 2012 à 2015) est égal à :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)×\left(1+\frac{t}{100}\right)×\left(1+\frac{t}{100}\right)=\left(1+\frac{t}{100}\right)^{3}$$

Or, sur trois années, le prix a augmenté de 25 % donc ce coefficient multiplicateur est également égal à : $1,25$.

On a donc :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^{3}=1,25$$

$$1+\frac{t}{100}=1,25^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{t}{100}=1,25^{\frac{1}{3}}-1$$

$$t=100×\left(1,25^{\frac{1}{3}}-1\right)$$

$$t≈7,72 $$

Le taux d’évolution moyen annuel est environ égal 7,72%.

Remarque : $a^{\frac{1}{n}}$ est appelé la **racine n-ième** de $a$.

On peut également noté $\sqrt[n]{a}$.

On a par exemple : Si $x^{2}=a$ alors $x=\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$ !

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)