

ARITHMETIQUE

Le mot vient du grec « arithmos » = nombre. En effet, l'arithmétique est la science des nombres. Citons la célèbre conjecture de Goldbach énoncée en 1742 et à ce jour jamais démontrée :
« Tout nombre entier pair est la somme de deux nombres premiers »

I. Divisibilité

1) Rappels

Un nombre entier est divisible :

- par 2, si son chiffre des unités est pair,
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5,
- par 10, si son chiffre des unités est 0,
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemples :

- 1) 30 est divisible par 2, 5, 10 et 3.
- 2) 1071 est divisible par 3 et 9
- 3) 3192 est-il divisible par 7 ?

Méthode :

$$\begin{array}{r}
 3192 \\
 - \underline{4} \\
 315 \\
 - \underline{10} \\
 21
 \end{array}$$

on soustrait le double de 2 à 319

on soustrait le double de 5 à 31

21 est divisible par 7, donc 3192 aussi.

- 3) 61952 est-il divisible par 11 ?

Méthode :

$$\begin{array}{r}
 61952 \\
 - \underline{2} \\
 6193 \\
 - \underline{3} \\
 616 \\
 - \underline{6} \\
 55
 \end{array}$$

on soustrait 2 à 6195

on soustrait 3 à 619

on soustrait 6 à 61

55 est divisible par 11, donc 61952 aussi.



Exercices conseillés	En devoir
p46 n°20 à 22	p46 n°30 et 32
p46 n°33 à 37	p55 n°2, 3 et 4
p53 n°136	

2) Nombres premiers

Définition : Un nombre est premier s'il possède deux diviseurs uniques qui sont 1 et lui-même.

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Cette liste est infinie.

3) Diviseurs communs à deux entiers

Exemple :

Tous les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Tous les diviseurs de 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

Les diviseurs communs à 60 et 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20

4) PGCD

Définition : Le *PGCD* de deux nombres entiers est le *Plus Grand Commun Diviseur* à ces deux entiers.

Exemple :

Le *PGCD* de 60 et 100 est donc 20, on note $PGCD(60,100) = 20$

Exercices conseillés	En devoir
p47 n°40 à 44	p50 n°106 à 108
p51 n°111	

5) Algorithme de calcul du PGCD de deux nombres entiers

Le mot « algorithme » vient d'une déformation du nom du mathématicien perse **al Khwarizmi** (IX^{ème} siècle).

Un algorithme est une succession de manipulations sur les nombres qui s'exécutent toujours de la même façon.



Méthode 1 : L'algorithme d'Euclide

Déterminons PGCD(252,360)

- on divise le plus grand par le plus petit :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 252 \\ \hline 108 & 1 \end{array}$$

- on divise le **diviseur précédent** par le **reste précédent**

$$\begin{array}{r|l} 252 & 108 \\ \hline 36 & 2 \end{array}$$

- on divise le **diviseur précédent** par le **reste précédent**

$$\begin{array}{r|l} 108 & 36 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

- le reste est nul, on arrête.

PGCD(252 , 360) = 36 (dernier reste non nul)

Exercices conseillés En devoir

p44 n°5 et 6

--

Méthode 2 : Soustractions successives

Déterminons PGCD(252,360) :

- on soustraie le plus grand par le plus petit :

$$360 - 252 = 108$$

- on soustraie les plus petits entre eux :

$$252 - 108 = 144$$

- on soustraie les plus petits entre eux :

$$144 - 108 = 36$$

- on soustraie les plus petits entre eux :

$$108 - 36 = 72$$

- on soustraie les plus petits entre eux :

$$72 - 36 = 36$$

- on soustraie les plus petits entre eux :

$$36 - 36 = 0$$

- la différence est nulle, on arrête.

PGCD(252,360) = 36 (*dernière différence non nulle*)

Exercices conseillés	En devoir
PGCD(295,177)	p44 n°7 et 8
PGCD(405,243)	
PGCD(494,143)	p49 n°87 et 90
Sol : 59, 81 et 13	
p44 n°3 et 4	
<u>Problèmes :</u>	
p47 n°55 à 57	
p49 n°83 et 84	
p52 n°130, 134	
p53 n°138	

TP info : L'algorithme d'Euclide

<http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Euclide.pdf>

<http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Euclide.ods> (feuille de calcul OOo)

TP info : L'algorithme le plus performant

http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Compa_algo.pdf

http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Compa_algo.ods (feuille de calcul OOo)

ou

TICE

p56 n°30	
----------	--

II. Nombres premiers entre eux

Exemple :

Tous les diviseurs de 10 sont : 1, 2, 5, 10

Tous les diviseurs de 7 sont : 1, 7

donc PGCD(10,7) = 1

On dit que 10 et 7 sont premiers entre eux.

Propriété : On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur PGCD est égal à 1.

Exercices conseillés	En devoir
p47 n°46 à 50	p47 n°51
p132 n°135	

III. Application aux fractions

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Pour rendre une fraction irréductible, il faut la simplifier par le PGCD de son numérateur et son dénominateur.

Méthode :

Les fractions $\frac{10}{7}$ et $\frac{252}{360}$ sont-elles irréductibles ? Dans le cas contraire, les rendre irréductible.

1) $\text{PGCD}(10,7) = 1$ donc $\frac{10}{7}$ est irréductible.

2) $\text{PGCD}(252,360) = 36$ donc $\frac{252}{360} = \frac{252:36}{360:36} = \frac{7}{10}$

Exercices conseillés	En devoir
p45 n°10 à 19 p44 n°9	p48 n°61 et 62



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales