

# FONCTIONS EXPONENTIELLES

## (Partie 1)

### I. Fonction exponentielle de base $q$

#### 1) Définition

On considère la suite géométrique de raison  $q$  définie par  $u_n = q^n$ .

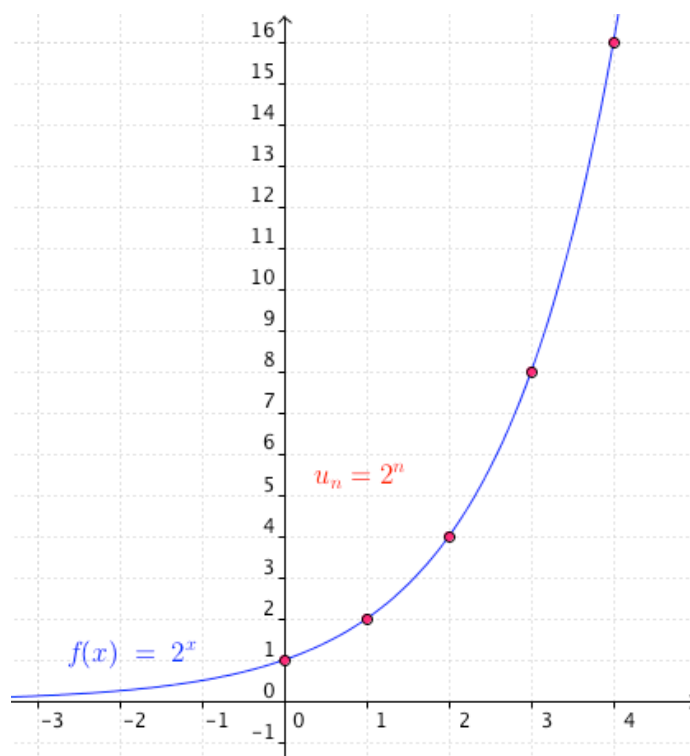
Elle est définie pour tout entier naturel  $n$ .  
En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base  $q$ .

Ainsi par exemple :

Pour une suite, on a  $u_4 = 2^4$

Pour une fonction, on a  $f(4) = 2^4$  mais on

a aussi  $f(1,3) = 2^{1,3}$



**Définition :** La fonction  $x \mapsto q^x$ , avec  $q > 0$ , s'appelle fonction exponentielle de base  $q$ .

Exemple :

La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto 1,2^x$ .

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle de base  $q$ .

$$\begin{array}{r}
 1.2^5 \\
 2.48832 \\
 1.2^{-2} \\
 .6944444444 \\
 1.2^{2,3} \\
 1.520937655
 \end{array}$$

A noter :  $x^{0,5} = \sqrt{x}$

**Propriété :** La fonction exponentielle de base  $q$  est définie, strictement positive, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- Admis -

2) Propriétés

**Relation fonctionnelle :** Pour tout réel  $x$  et  $y$ , on a  $q^{x+y} = q^x \times q^y$

- Admis -

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

**Propriétés :** Pour tout réel  $x$  et  $y$ , on a :

a)  $q^0 = 1$  et  $q^1 = q$

b)  $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$

c)  $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$

d)  $(q^x)^n = q^{nx}$  avec  $n$  un entier relatif.

Démonstration de b et c :

b)  $q^x q^{-x} = q^{x-x} = q^0 = 1$  donc  $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$ .

c)  $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x q^{-y} = q^x \frac{1}{q^y} = \frac{q^x}{q^y}$

Méthode : Simplifier une expression

 **Vidéo** <https://youtu.be/PHTOZid0kzM>

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$$

$$B = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$$

$$C = (4,8^{-2,1})^3 \times 4,8^{6,2}$$

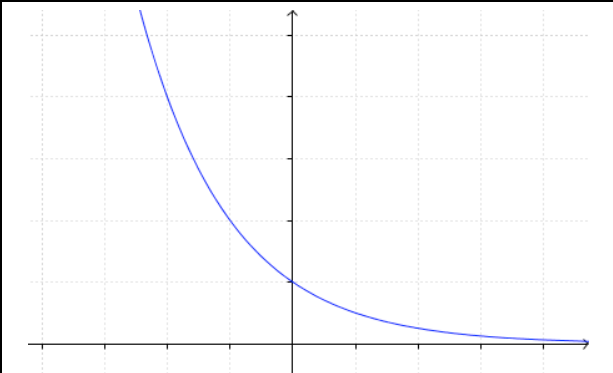
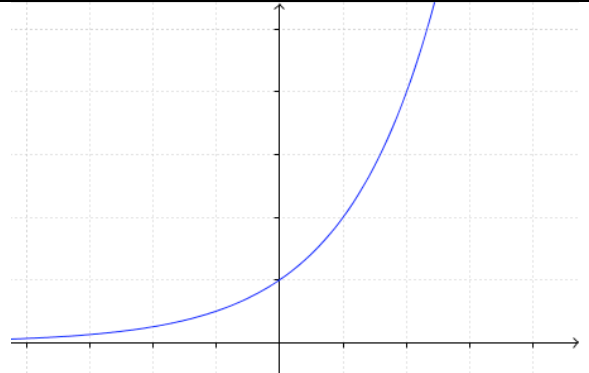
$$\begin{aligned} A &= 4^{-3} \times 4^{-5} \\ &= 4^{-3+(-5)} \\ &= 4^{-8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5} \\ &= \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{(3^2)^5} \\ &= \frac{3^{3-2,5}}{3^{2 \times 5}} \\ &= \frac{3^{0,5}}{3^{10}} \\ &= 3^{0,5-10} = 3^{-9,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (4,8^{-2,1})^3 \times 4,8^{6,2} \\ &= 4,8^{-2,1 \times 3} \times 4,8^{6,2} \\ &= 4,8^{-6,3} \times 4,8^{6,2} \\ &= 4,8^{-6,3+6,2} \\ &= 4,8^{-0,1} \end{aligned}$$

## II. Variations de la fonction exponentielle de base $q$

 Vidéo [https://youtu.be/YQoR7CFM\\_1U](https://youtu.be/YQoR7CFM_1U)

$0 < q < 1$	$q > 1$
$x \mapsto q^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$x \mapsto q^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = +\infty$
	

- Admis -

### Remarques :

- Si  $q = 1$  alors la fonction exponentielle de base  $q$  est constante. En effet, dans ce cas,  $q^x = 1^x = 1$
- Quel que soit  $q$ , la fonction exponentielle de base  $q$  passe par le point  $(0 ; 1)$ . En effet,  $q^0 = 1$ .
- La fonction exponentielle de base  $q$  est convexe.

### Méthode : Utiliser une fonction exponentielle de base $q$

 Vidéo <https://youtu.be/maK64g-y3gA>

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 10]$  par :  $f(x) = 50000 \times 1,15^x$ .

- À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
- Déterminer les variations de  $f$  sur  $[0 ; 10]$ .
- À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

a)  $f(3) = 50000 \times 1,15^3 \approx 76000$   
 $f(5,5) = 50000 \times 1,15^{5,5} \approx 108000$

$$\begin{array}{r} 50000 * 1.15^3 \\ 76043.75 \\ 50000 * 1.15^{5.5} \\ 107847.0143 \end{array}$$

b)  $1,15 > 1$  donc la fonction  $x \mapsto 1,15^x$  est strictement croissante sur  $[0 ; 10]$ . Il en est de même pour la fonction  $f$ .

c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.91	99311
4.92	99450
4.93	99589
4.94	99728
4.95	99868
4.96	100007
4.97	100147

X=4.96



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)