

# GRAPHES (Partie 2)

## I. Graphes orientés et graphes pondérés

### 1) Graphes orientés

**Définitions :** - Un graphe est orienté si ses arêtes, appelées arcs dans ce cas, ont un sens de parcours.

- Un chemin est une succession d'arcs mis bout à bout.

- Un circuit est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

**Exemple :**

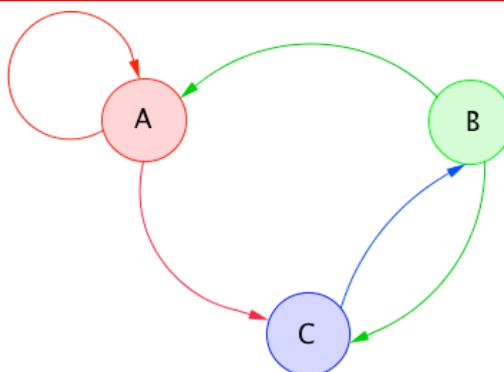
Le graphe orienté ci-contre est d'ordre 3 car il possède 3 sommets.

Il possède une boucle sur le sommet A.

A – C – B est un chemin de longueur 2.

B – C – B – A – A – C – B est un chemin fermé de longueur 6.

A – C – B – A est un circuit de longueur 3.



### 2) Graphes pondérés

**Définitions :** - Un graphe est étiqueté si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectés d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, ...)

- Dans le cas où les étiquettes sont des nombres, le graphe est dit pondéré. Les étiquettes sont appelées les poids entre les sommets.

- Le poids du chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).

**Exemple :**

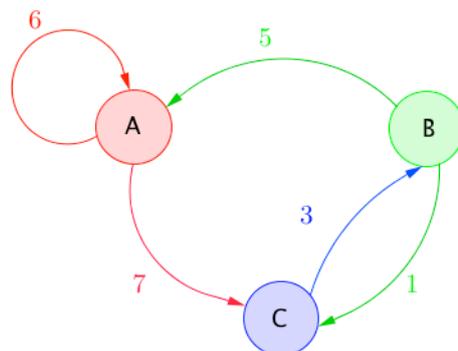
Le graphe orienté ci-contre est pondéré.

Le poids entre le sommet B et le sommet A est égal à 5.

Le poids du chemin B – C – B – A est égal à :

$$1 + 3 + 5 = 9$$

📺 Vidéo <https://youtu.be/ZEiOWcqX7S4>



**Remarque :**

Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

### 3) Matrice associée à un graphe orienté

**Définition :** Soit un graphe  $G$  orienté d'ordre  $n$  dont les sommets sont numérotés de 1 à  $n$ .

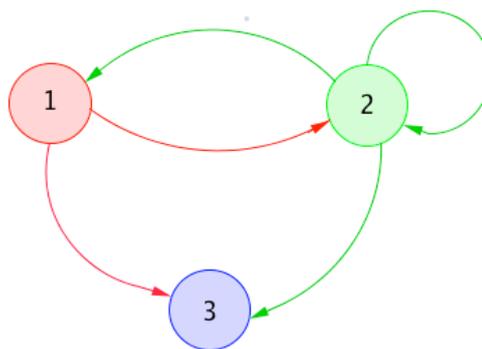
La matrice d'adjacence associée à  $G$  est la matrice carrée de taille  $n$  dont chaque terme  $a_{ij}$  est égal au nombre d'arcs orientés reliant les sommets  $i$  et  $j$ .

Exemple :

▶ Vidéo <https://youtu.be/yRBCx3uxN9A>

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

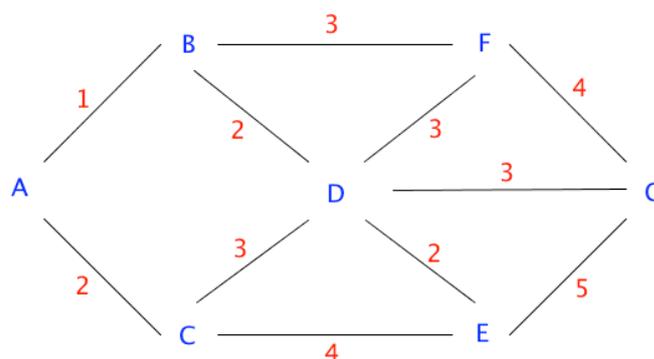


Méthode : Trouver le plus court chemin dans un graphe en utilisant l'algorithme de Dijkstra

▶ Vidéo <https://youtu.be/rHyICtXtdNs>

Le graphe ci-contre représente un réseau routier entre 7 villages A, B, C, D, E, F et G. Les étiquettes correspondent aux distances en kilomètres séparant deux villages.

On veut déterminer le chemin le plus court entre les villages A et G.



Il s'agit donc de déterminer le chemin reliant A et G dont le poids est minimum. On va utiliser l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	Légende :
0	1 - A	2 - A					(1)
	1 - A		3 - B		4 - B		(2)
		2 - A	5 - C	6 - C			(3)
			3 - B	5 - D	6 - D	6 - D	(4)
					4 - B	8 - F	(5)
				5 - D		10 - E	(6)
						6 - D	(7)

Explications :

On complète le tableau dans l'ordre de la ligne (1) à la ligne (7) :

(1) : On part de A avec 0 km.

On ne reviendra plus en A, donc on colorie en bleu toute la colonne A.

Partant de A, pour aller en B, on a parcouru 1 km : d'où la notation "1 - A".

Partant de A, pour aller en C, on a parcouru 2 km : d'où la notation "2 - A".

(2) : On choisit le sommet B qui a la plus petite distance (1).

On ne reviendra plus en B, donc on colorie toute la colonne B.

Partant de B, pour aller en D, on a parcouru  $1+2 = 3$  km.

Partant de B, pour aller en F, on a parcouru  $1+3 = 4$  km.

(3) : On choisit le sommet C qui a la plus petite distance (2).  
 On ne reviendra plus en C, donc on colorie toute la colonne C.  
 Partant de C, pour aller en D, on a parcouru  $2+3 = 5$  km.  
 Partant de C, pour aller en E, on a parcouru  $2+4 = 6$  km.

(4) : On choisit le sommet D qui a la plus petite distance (3 en 2<sup>e</sup> ligne).  
 On ne reviendra plus en D, donc on colorie toute la colonne D.  
 Partant de D, pour aller en E, on a parcouru  $3+2 = 5$  km.  
 Partant de D, pour aller en F, on a parcouru  $3+3 = 6$  km.  
 Partant de D, pour aller en G, on a parcouru  $3+3 = 6$  km.

(5) : On choisit le sommet F qui a la plus petite distance (4 en 2<sup>e</sup> ligne).  
 On ne reviendra plus en F, donc on colorie toute la colonne F.  
 Partant de F, pour aller en G, on a parcouru  $4+4 = 8$  km.

(6) : On choisit le sommet E qui a la plus petite distance (5).  
 On ne reviendra plus en E, donc on colorie toute la colonne E.  
 Partant de E, pour aller en G, on a parcouru  $5+5 = 10$  km.

(7) : On choisit le sommet G qui a la plus petite distance (6).

Le chemin le plus court est donc égal à 6 km.

Pour obtenir ce chemin, on suit "à l'envers" les correspondances du tableau :

Colonne G : 6 – D

Colonne D : 3 – B

Colonne B : 1 – A

Colonne A : 0

Le chemin le plus court est donc A – B – D – G.



## II. Graphes probabilistes

### 1) Définition

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

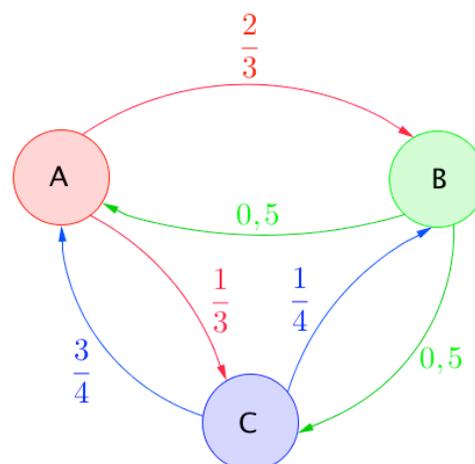
Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisées sur le graphe orienté et pondéré suivant. Chaque passe de ballon correspond à une

nouvelle expérience aléatoire dont les issues sont  $A$ ,  $B$  ou  $C$  (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon).

Par exemple, la probabilité que l'attaquant  $A$  passe le ballon à l'attaquant  $B$  est égale à  $\frac{2}{3}$ .

Les poids des arcs sont alors des probabilités.

Un tel schéma est appelé un **graphe probabiliste**.



**Définition :** Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égal à 1.

Par exemple, la somme des poids issus de  $A$  est égal à  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ .

### 3) Matrice de transition

**Définition :** Soit  $G$  un graphe probabiliste d'ordre  $n$  dont les sommets sont numérotés de 1 à  $n$ .

La **matrice de transition** de  $G$  est la matrice carrée d'ordre  $n$  dont le coefficient situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est la probabilité portée par l'arc reliant le sommet  $i$  vers le sommet  $j$  s'il existe et 0 dans le cas contraire.

► Vidéo [https://youtu.be/KRi0C\\_zOsHs](https://youtu.be/KRi0C_zOsHs)

Dans l'exemple, la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Transition du sommet A vers les autres sommets} \\ \leftarrow \text{Transition du sommet B vers les autres sommets} \\ \leftarrow \text{Transition du sommet C vers les autres sommets} \end{array}$$

On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant  $B$  alors qu'il se trouvait chez l'attaquant  $A$ .

**Remarques :**

- Le coefficient  $a_{11}$  de la matrice  $M$  est nul car la probabilité que l'attaquant  $A$  garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients  $a_{22}$  et  $a_{33}$ .

- La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à 1.

**Définition :** L'état probabiliste après  $n$  étapes est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après  $n$  étapes.

Exemple :

Dans l'exemple des passeurs au football, l'état probabiliste après 3 étapes donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant  $A$ , chez l'attaquant  $B$  et chez l'attaquant  $C$  après 3 passes.

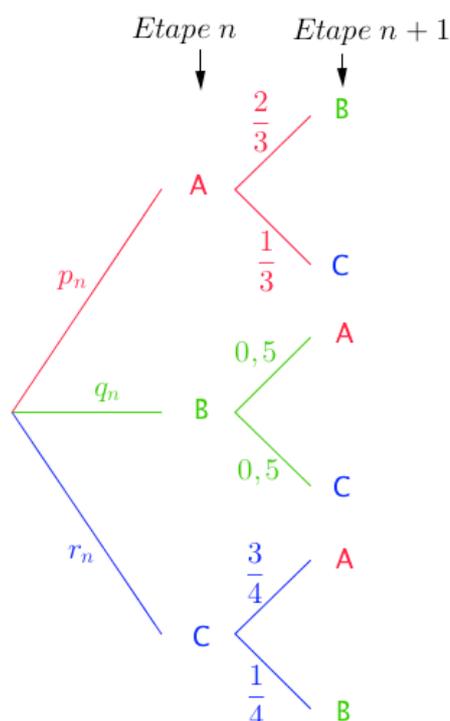
L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de l'étape  $n$  à l'étape  $n+1$ .

A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,5q_n + \frac{3}{4}r_n \\ q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 0,5q_n \end{cases}$$

On note  $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$  l'état probabiliste après  $n$  étapes.

On a alors :  $P_{n+1} = P_n \times M$ .



**Propriété :** On considère un graphe probabiliste de matrice de transition  $M$  et dont l'état probabiliste après  $n$  étapes est  $P_n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $P_{n+1} = P_n \times M$  et  $P_n = P_0 \times M^n$  où  $P_0$  est l'état initial.

- Admis -

Exemple :

📺 Vidéo <https://youtu.be/gxrgpotHfnE>

Dans l'exemple précédent, on suppose l'attaquant  $A$  possède le ballon à l'étape 0. La matrice ligne des états après la 3<sup>e</sup> étape est égale à :  $P_3 = P_0 \times M^3$ .

On a  $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  car le ballon part de  $A$ .

Avec la calculatrice, on obtient :  $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$

Donc  $P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \end{pmatrix}$ .

Ainsi par exemple, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la 3<sup>e</sup> passe est égale à  $\frac{17}{72} \approx 0,24$ .

#### 4) Etat stable

**Définition :** Un état probabiliste est dit stable lorsqu'il n'évolue pas lors de répétitions de l'expérience.

**Propriété :** Soit un graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de 0.

L'état stable  $P$  vérifie alors l'égalité  $P = P \times M$ .

Et si  $n$  tend vers l'infini, alors l'état probabiliste  $P_n$  tend vers l'état stable  $P$ .

- Admis -

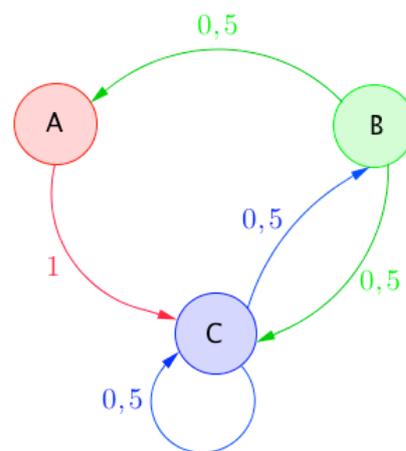
#### Exemple :

On considère le graphe probabiliste ci-contre :

Vérifions à l'aide de la calculatrice, que l'état stable est

la matrice ligne  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ .

La matrice de transition est  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ .

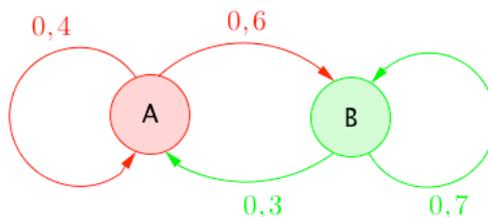


L'état stable  $P$  vérifie l'équation  $P = P \times M$ , en effet :

### Méthode : Déterminer un état stable

Vidéo <https://youtu.be/PS756B-M0Dw>

On considère le graphe probabiliste ci-dessous :



Déterminer l'état stable pour cette situation.

La matrice de transition est  $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $P_{n+1} = P_n \times M$  où  $(P_n)$  est la suite des états probabilistes.

L'état stable  $P = (p \quad q)$  vérifie l'équation  $P = P \times M$ , soit

$$(p \quad q) = (p \quad q) \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a le système  $\begin{cases} p = 0,4p + 0,3q \\ q = 0,6p + 0,7q \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6p = 0,3q \\ 0,3q = 0,6p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q = 2p$$

Comme  $p + q = 1$ , on a  $1 - p = 2p$  et donc  $p = \frac{1}{3}$  et  $q = \frac{2}{3}$ .

L'état stable du graphe est donc  $P = \left( \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \right)$ .

Cela signifie que quelque soit l'état initial (départ de  $A$  ou de  $B$ ), les probabilités d'être en  $A$  et en  $B$  tendent respectivement vers  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{2}{3}$ .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)