INTEGRATION (Partie 2)

I. Calcul d'intégrales

1) Définition

Propriété : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration :

La dérivée de la fonction G définie sur $[a\ ;\ b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la fonction f.

Donc G est une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$.
Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a\ ;\ b]$, on a $G(x) = F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

De plus, $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $F(a) = -k$ et donc $k = -F(a)$.

Or $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) + k = F(b) - F(a)$.

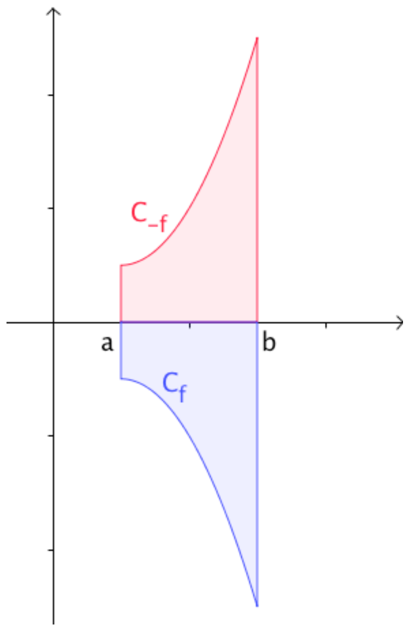
Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\ ;\ b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a\ ;\ b]$ la différence $F(b) - F(a)$ noté $\int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque :
La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.
Ainsi pour une fonction f négative sur $[a\ ;\ b]$, on peut écrire :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$= -\big(G(b) - G(a)\big)$$ où G est une primitive de la fonction $-f$.

$$= -\int_a^b \big(-f(x)\big)\,dx$$



Dans ce cas, l'intégrale de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de f sur $[a\ ;\ b]$.

Notations :

On écrit : $\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Vidéo https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw
Vidéo https://youtu.be/8ci1RrNH1L0
Vidéo https://youtu.be/uVMRZSmYcQE
Vidéo https://youtu.be/BhrCsm5HaxQ

Calculer : $A=\int_2^5\left(3x^2+4x-5\right)dx$ $\quad B=\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$ $\quad C=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+3}\,dx$

$$\begin{aligned}A&=\int_2^5\left(3x^2+4x-5\right)dx\\&=\left[x^3+2x^2-5x\right]_2^5\\&=5^3+2\times5^2-5\times5-\left(2^3+2\times2^2-5\times2\right)\\&=125+50-25-\left(8+8-10\right)\\&=144\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx\\&=\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1\\&=\frac{1}{-2}e^{-2\times1}-\frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}\\&=-\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}e^2\\&=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+3}\,dx\\&=\left[\ln\left(e^x+3\right)\right]_0^1\\&=\ln\left(e^1+3\right)-\ln\left(e^0+3\right)\\&=\ln\left(e+3\right)-\ln4\\&=\ln\left(\frac{e+3}{4}\right)\end{aligned}$$

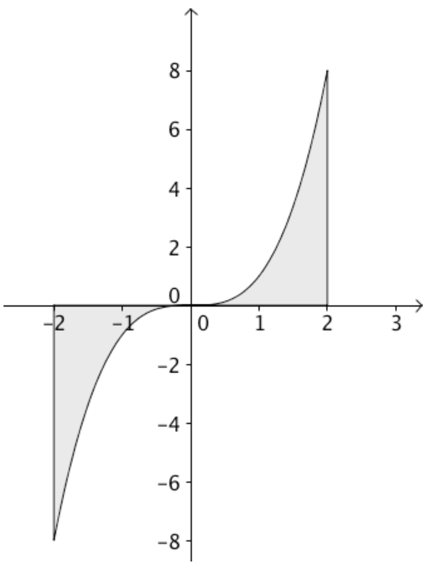
Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) $\int_a^a f(x)\,dx=0$

b) $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

a) $\int_a^a f(x)\,dx=F(a)-F(a)=0$

b) $\int_b^a f(x)\,dx=F(a)-F(b)=-\left(F(b)-F(a)\right)=-\int_a^b f(x)\,dx$



Remarque :
Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.
Par exemple :

$$\int_{-2}^2 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^2=\frac{1}{4}\times2^4-\frac{1}{4}\times\left(-2\right)^4=4-4=0.$$

2) Relation de Chasles

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I.

$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

Démonstration :

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
$$= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

3) Linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :
On applique les propriétés sur les primitives :
- kF est une primitive de kf
- $F+G$ est une primitive de $f+g$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

Vidéo https://youtu.be/B9n_AArwjKw

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$

a) Calculer $A+B$ et $A-B$.
b) En déduire A et B.

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A+B = \int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x\right)dx + \int_0^{2\pi}\left(\sin^2 x\right)dx$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)dx$$
$$= \int_0^{2\pi} 1\,dx$$
$$= \left[x\right]_0^{2\pi}$$
$$= 2\pi - 0$$
$$= 2\pi$$

$$A-B = \int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x\right)dx - \int_0^{2\pi}\left(\sin^2 x\right)dx$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(\cos 2x\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\sin\left(2\times 2\pi\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2\times 0\right) = 0$$

b) On a ainsi :

$$\begin{cases} A+B = 2\pi \\ A-B = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases} \text{ soit : } A = B = \pi.$$

4) Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $\left[a;b\right]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $\left[a;b\right]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :
a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.
b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx \geq 0$.

Par linéarité, on a $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

Vidéo https://youtu.be/VK0PvzWBIso

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$.

a) Sur [0 ; 1], $x^2 \leq x$.
Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$.

$\int_0^1 0\,dx = 0$ et $\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

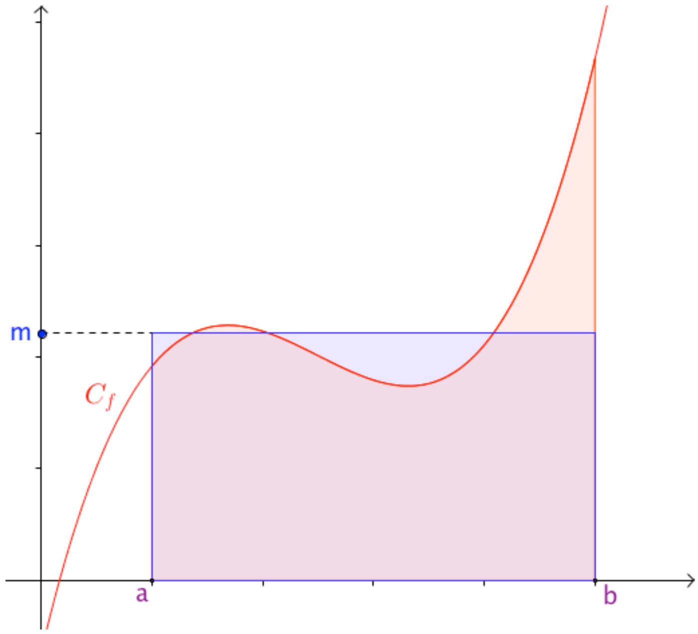
D'où $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$

II. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b] le nombre réel $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Interprétation géométrique :
L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).



Exemple :
Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x)=3x^2-4x+5$ sur l'intervalle [0 ; 10].

$$m=\frac{1}{10-0}\int_0^{10}\left(3x^2-4x+5\right)dx$$
$$=\frac{1}{10}\left[x^3-2x^2+5x\right]_0^{10}$$
$$=\frac{1}{10}\left(1000-200+50\right)$$
$$=85$$

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/WzV_oLf1w6U

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x)=16x^2-x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$m=\frac{1}{16-0}\int_0^{16}f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{16}\int_0^{16}\left(16x^2-x^3\right)dx$$
$$=\frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{16}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4\right)$$

$$= \frac{16^3}{3} - \frac{16^3}{4}$$

$$= \frac{16^3}{12}$$

$$= \frac{1024}{3} \approx 341$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.