SUITES ARITHMETIQUES ET SUITES GEOMETRIQUES

Vidéo https://youtu.be/pHq6oClOyIU

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemples :

a) Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
u_0 = 3,
u_1 = 8,
u_2 = 13,
u_3 = 18.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$.

b) Soit la suite numérique (v_n) de premier terme 5 et de raison -2.
Les premiers termes successifs sont :
v_0 = 5,
v_1 = 5 – 2 = 3,
v_2 = 3 – 2 = 1,
v_3 = 1 – 2 = -1.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$.

Définition : Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé raison de la suite.

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

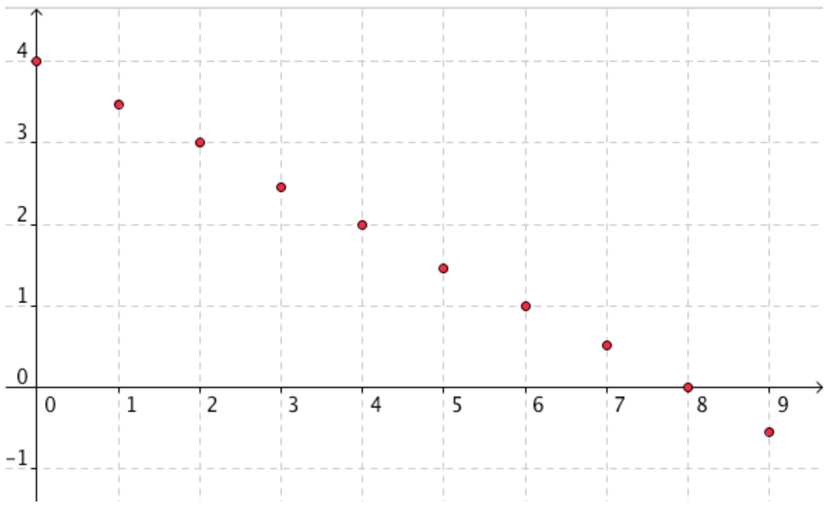
Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :
La suite arithmétique (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n - 4$ et $u_0 = 5$ est décroissante car de raison négative et égale à -4.

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison -0,5 et de premier terme 4.



II. Suites géométriques

1) Définition

Exemples :

a) Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$, $u_1 = 10$, $u_2 = 20$, $u_3 = 40$.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

b) Soit la suite numérique (v_n) de premier terme 4 et de raison 0,1.

Les premiers termes successifs sont :
v_0 = 4
v_1 = 0,1 x 4 = 0,4
v_2 = 0,1 x 0,4 = 0,04
v_3 = 0,1 x 0,04 = 0,004

La suite est donc définie par : $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 0,1 \times v_n \end{cases}$.

Définition : Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q, strictement positif, tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite.

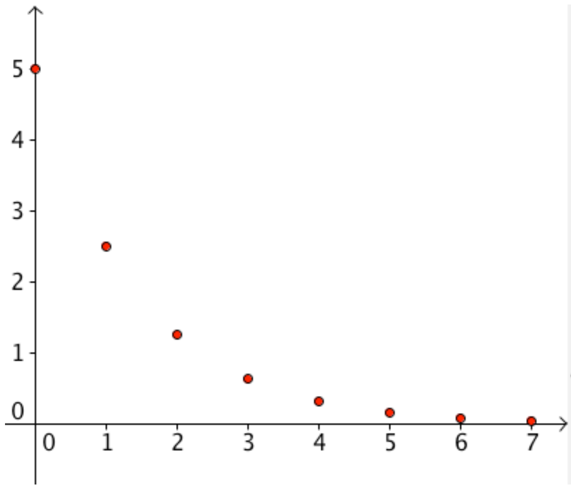
Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élève à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :
$u_1 = 1,04 \times 500 = 520$ $\quad$ $u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$ $\quad$ $u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$
De manière générale : $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$

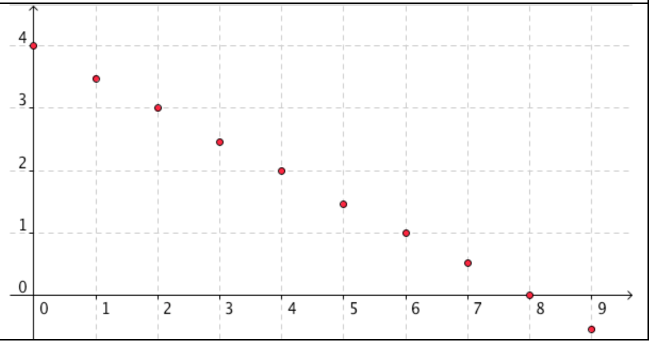
2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 strictement positif.
- Si q > 1 alors la suite (u_n) est croissante.
- Si q = 1 alors la suite (u_n) est constante.
- Si 0 < q < 1 alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :
La suite géométrique (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 0,5u_n \end{cases}$ est décroissante car la raison est strictement inférieure à 1.



	A	B
1	n	u_n
2	0	5
3	1	2.5
4	2	1.25
5	3	0.63
6	4	0.31
7	5	0.16
8	6	0.08
9	7	0.04
10	8	0.02
11	9	0.01

RÉSUMÉS	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de premier terme u_0	**Exemple :** $r=-0,5$ et $u_0=4$
Définition	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=u_n-0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5.
Variations	Si r > 0 : (u_n) est croissante. Si r < 0 : (u_n) est décroissante.	$r=-0,5<0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.	

	(u_n) une **suite géométrique** - de **raison** $q>0$ - de premier terme $u_0>0$	**Exemple :** $q=0,5$ et $u_0=5$
Définition	$u_{n+1}=q\times u_n$	$u_{n+1}=0,5\times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 0,5.
Variations	Si q > 1 : (u_n) est croissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est décroissante.	$q=0,5<1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si q < 0 : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.