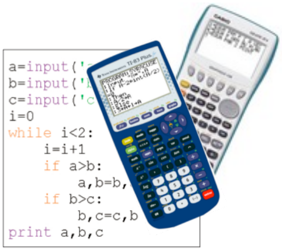


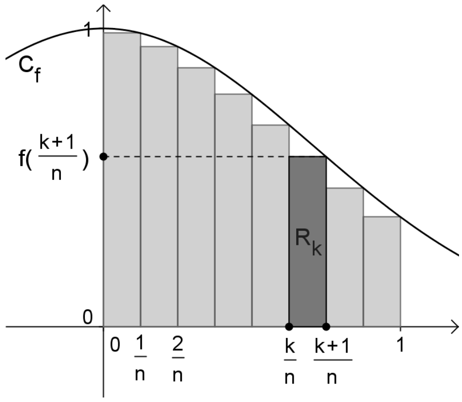
Sur une idée de F.Chevrier

APPROXIMATION D'UNE INTEGRALE PAR LA METHODE DES RECTANGLES

Certaines fonctions ne possèdent pas de primitives qui peuvent s'écrire à l'aide d'une fonction.
C'est par exemple le cas de la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=e^{-x^2}$.

Le but de cette activité est d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

PARTIE A : Avec un logiciel de géométrie dynamique

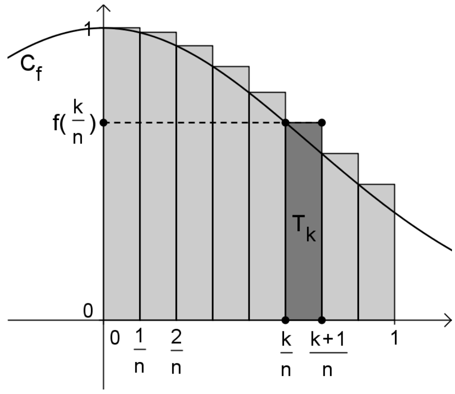


1) Avec le logiciel :
- Tracer la fonction *f*.
- Créer un curseur *n* prenant les valeurs entières de 1 à 100.
- Saisir « **s_n=sommeinférieure(f,0,1,n)** ».

Le logiciel crée ainsi n rectangles sous la courbe de f.

2) Justifier que l'aire grisée, somme des aires des rectangles R_k, est égale à : $s_n=\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$.

Remarque : On peut aussi noter : $s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$



3) Saisir « **S_n=sommesupérieure(f,0,1,n)** ».

Le logiciel crée ainsi n rectangles au-dessus la courbe de f.

4) Donner pour S_n une formule similaire à celle obtenue pour s_n.

5) En raisonnant sur les aires, donner à l'aide du logiciel un encadrement le plus précis possible de $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

PARTIE B : Avec un algorithme

1) Programmer un algorithme qui demande un entier naturel *n* et qui donne la valeur de s_n.

2) Recherche de la précision de la méthode :

a) Exprimer S_n-s_n en fonction de $f(0)$; $f(1)$ et *n*.

b) En déduire que $0\le\int_0^1 e^{-x^2}dx-s_n\le\frac{1}{n}$.

c) Quelle valeur de *n* faut-il choisir pour que s_n soit une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ à 10^{-4} près ?

3) A l'aide de l'algorithme, déterminer une valeur approchée de $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$ à 10^{-4} près.

Soyez patient ! Cela peut prendre du temps avec une calculatrice.