ARITHMÉTIQUE

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/al9oHwrlTNo**](https://youtu.be/al9oHwrlTNo)

Le mot vient du grec « arithmos » = nombre. En effet, l’arithmétique est la science des nombres.

Citons la célèbre conjecture de Goldbach énoncée en 1742 et à ce jour jamais démontrée :

« Tout nombre entier pair est la somme de deux nombres premiers »

**Partie 1 : Divisibilité**

Propriétés : Un nombre entier est divisible :

 - par 2, si son chiffre des unités est pair (se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

 - par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5,

 - par 10, si son chiffre des unités est 0,

 - par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3,

 - par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Exemples :

a) 15 est divisible par 3 et par 5.

On peut dire alors que 3 et 5 sont des **diviseurs** de 15.

Mais on peut également dire que 15 est un **multiple** de 3 ou de 5.

b) 456 est divisible par 3.

En effet, 4 + 5 + 6 = 15 est divisible par 3.

Méthode : Déterminer les diviseurs d’un nombre

 **Vidéo** [**https://youtu.be/sSgsrHMyFrI**](https://youtu.be/sSgsrHMyFrI)

Dresser la liste des diviseurs de 24.

**Correction**

24 est divisible par 1 et 24.

Pour les autres, l’astuce est de les chercher par couple.

Par exemple, 2 divise 24 donc 12 divise également 24 car 2 $× $12 = 24.

En poursuivant ainsi, on trouve la liste des diviseurs de 24 :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

**Partie 2 : Nombres premiers**

1) Définition

Définition : Un nombre est **premier** s’il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples :

*Divertissement :*

Le nombre 73939133 est un nombre premier. Si on retire à chaque fois son dernier chiffre, il reste premier.

Ainsi,

73939133

7393913

739391

73939

7393

739

73

7 sont tous premiers.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … Cette liste est infinie.

Remarque :

Le nombre 1 n’est pas premier car il n’a qu’un seul diviseur.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/N1gY8G\_Y5k4**](https://youtu.be/N1gY8G_Y5k4)

Méthode : Déterminer si un nombre est premier ou non

 **Vidéo** <https://www.youtube.com/watch?v=g9PLLhnCv88>

6 et 11 sont-ils des nombres premiers ?

**Correction :**

* 6 peut s’écrire 2 $×$ 3 et a donc 2 et 3 comme diviseurs en plus de 1 et 6.

6 a donc plus que deux diviseurs et n’est alors pas premiers.

* 11 n’a pas d’autres diviseurs que 1 et 11 donc il est premier.

 2) Décomposition d’un nombre en produit de facteurs premiers

Exemples :

- 20 = 2 $×$ 2 $×$ 5 est une décomposition du nombre 20 en produit de facteurs premiers.

En effet, chaque facteur de la décomposition est un nombre premier.

- 231 = 3 $×$ 7 $×$ 11

- 225 = 3 $×$ 3 $×$ 5 $×$ 5

Propriété : Tout nombre non premier peut se décomposer en produit de facteurs premiers. L’ordre des facteurs n’a pas d’importance.

Méthode : Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RBE2wPIKagI**](https://youtu.be/RBE2wPIKagI)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/QoRWa45dQig**](https://youtu.be/QoRWa45dQig)

Décomposer 300 en produit de facteurs premiers.

**Correction :**

Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers :

2, 3, 5, 7, 11, 13, …

On commence par tester si **300** est divisible par **2** (1er nombre premier). **300** **2**

La réponse est « oui » car **300** se termine par un chiffre pair. **150**

Et on a : **300 : 2** = **150**

On recommence, en testant si **150** est divisible par **2**. 300 2

La réponse est « oui » et **150 : 2** = **75** **150** **2**

 **75**

On recommence, en testant si **75** est divisible par 2. 300 2

La réponse est « non » ! 150 2

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste. **75** **3**

Est-ce que **75** est divisible par **3**. **25**

La réponse est « oui » car 7+5=12 est divisible par 3.

Et on a : **75 : 3** = **25**

On recommence, en testant si **25** est divisible par 3. 300 2

La réponse est « non » ! 150 2

On teste alors le nombre premier suivant dans la liste. 75 3

Est-ce que **25** est divisible par **5**. **25** **5**

La réponse est « oui » et on a **25 : 5** = **5**. **5**

On recommence, en testant si **5** est divisible par **5**. 300 2

La réponse est « oui » et on a **5 : 5** = **1**. 150 2

 75 3

C’est fini, on trouve **1** ! 25 5

 **5** **5**

 **1**

La décomposition en produit de facteurs premiers de 300 se lit dans la colonne de droite.

 300 = **2** $×$ **2** $×$ **3** $×$ **5** $×$ **5**

**Partie 3 : Application aux fractions**

Définition : On dit qu’une fraction est **irréductible**, lorsque son numérateur et son dénominateur n’ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemples :

* $\frac{4}{9}$ est une fraction irréductible car les diviseurs de 4 sont 1, 2 et 4

 et les diviseurs de 9 sont 1, 3 et 9.

 Le seul diviseur commun de 4 et de 9 est 1.

* $\frac{2}{8}$ n’est pas une fraction irréductible car les diviseurs de 2 sont 1 et 2

 et les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4 et 8.

 2 et 8 ont deux diviseurs communs 1 et 2.

Méthode : Rendre une fraction irréductible

 **Vidéo** [**https://youtu.be/qZaTliAWkA0**](https://youtu.be/qZaTliAWkA0)

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

**Correction :**

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers.

 60 2 126 2

 30 2 63 3

 15 3 21 3

 5 5 7 7

 1 1

On ainsi les décompositions de 60 et 126 : 60 = 2 $×$ 2 $×$ 3 $×$ 5 et 126 = 2 $×$ 3 $×$ 3 $×$ 7

On a : $\frac{60}{126}=\frac{2×2×3×5}{2×3×3×7}=\frac{2×5}{3×7}=\frac{10}{21}$.

10 et 21 n’ont pas de diviseur commun.

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)