CALCUL ALGEBRIQUE

Tout le cours sur les développements en vidéo : https://youtu.be/gSa851JJn6c
Tout le cours sur les factorisations en vidéo : https://youtu.be/kQGWtMOHbrA

I. Somme de termes et produit de facteurs

1. Exemples :

Sommes (ou différences) de termes	Produits de facteurs
$x - 3$	$(6x + 1)(x - 1)$
$(2x + 4) + 3x$	$2(1 + 6x)$
$(5 - x) - (9 + 9x)$	$(8 - x)(2 + x)$
$3 + (2 + 3x)(x - 2)$	$(3 + 8x)(x - 8)^2$

Remarque :
$\frac{3}{2-x}$ est appelé un quotient. C'est le produit de 3 et de l'inverse de $2 - x$.

2. Valeurs « interdites » :

Pour certaines expressions dépendantes de x, il existe des valeurs de x pour lesquelles on ne peut pas calculer l'expression.

Exemple : Soit $A(x) = \frac{x+5}{4+x}$.
Pour $x = -4$, $4 + x = 0$.
Il n'est donc pas possible de calculer $A(-4)$.
Pour l'expression $A(x)$, x désigne un nombre réel différent de -4.

II. Développer et factoriser

1. Distributivité

Définitions :
Développer c'est transformer un produit en une somme (ou différence) de termes.
Factoriser c'est transformer une somme en un produit de facteurs.

Exemple :

DEVELOPPER

$$x(4 - y) = 4x - xy$$

FACTORISER

On dit que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition (ou la soustraction).
Dans l'exemple, on a *distribué* la multiplication par x sur les termes *4* et y.

2. Double-distributivité

Propriété :

$$(a+b)(c+d) = \underset{1}{ac} + \underset{2}{ad} + \underset{3}{bc} + \underset{4}{bd}$$

3. Identités remarquables

Propriété :

Pour tous nombres réels a et b, on a :

DEVELOPPER →

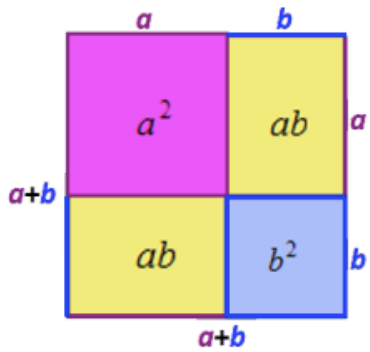
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
$(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$

← FACTORISER

Exemples :

$(x-5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$
$(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1.$
$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x+3)^2$

Illustration géométrique de la 1ère identité remarquable :
En considérant les aires dans le carré, on a : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



Vidéo https://youtu.be/wDAdBXIZNK4

Méthode : Développer une expression

Vidéo https://youtu.be/6NfvFZf1pAI
Vidéo https://youtu.be/o6qVMmA3oTQ

Développer et réduire l'expression suivante :
$A = (x+2)(4x-3) - x(7-x)$

On développe le membre de gauche en appliquant la ***double-distributivité*** et le membre de droite en appliquant la ***distributivité***.

$$\begin{aligned} A &= (x+2)(4x-3) - x(7-x) \\ &= 4x^2 - 3x + 8x - 6 - 7x + x^2 \\ &= 5x^2 - 2x - 6 \end{aligned}$$

4. Factoriser

Méthode : Factoriser une expression

Vidéo https://youtu.be/UGTFELhE9Dw

Factoriser les expressions suivantes :

$B = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$

$C = (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x)$

$D = 5(1 - 2x) - (4 + 3x)(2x - 1)$

$E = 3x^2 - x$

Pour factoriser, il faut trouver dans chacun des termes de l'expression un facteur commun. Il s'agit ici de $2 + 3x$.

$$\begin{aligned} B &= 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x) \\ &= (2 + 3x)(3 - (5 + 2x)) \\ &= (2 + 3x)(3 - 5 - 2x) \\ &= (2 + 3x)(-2 - 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(1 + x) \\ &= (2 - 5x)(2 - 5x) - (2 - 5x)(1 + x) \\ &= (2 - 5x)((2 - 5x) - (1 + x)) \\ &= (2 - 5x)(2 - 5x - 1 - x) \\ &= (2 - 5x)(1 - 6x) \end{aligned}$$

Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes de l'expression pour faire apparaître un facteur commun :

$$\begin{aligned} D &= 5(1 - 2x) - (4 + 3x)(2x - 1) \\ &= 5(1 - 2x) + (4 + 3x)(1 - 2x) \\ &= (1 - 2x)(5 + (4 + 3x)) \\ &= (1 - 2x)(9 + 3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= 3x^2 - x \\ &= 3x^2 - x \times 1 \\ &= x(3x - 1) \end{aligned}$$

Méthode : Factoriser en utilisant une identité remarquable

Vidéo https://youtu.be/tO4p9TzMrls

Factoriser l'expression suivante :

$A = (3x + 1)^2 - 49$

On reconnaît une identité remarquable du type $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
avec $a = 3x + 1$ et $b = 7$.

$A = (3x + 1)^2 - 49$
$= (3x + 1)^2 - 7^2$
$= ((3x + 1) - 7)((3x + 1) + 7)$
$= (3x + 1 - 7)(3x + 1 + 7)$
$= (3x - 6)(3x + 8)$

III. Réduire au même dénominateur

Définition :
Réduire au même dénominateur c'est transformer une somme (ou une différence) de deux fractions en une seule fraction.

Propriété :
Pour tout nombre *a, b, c* et *d*, réels on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Méthode : Réduire au même dénominateur

Vidéo https://youtu.be/ld_udNTKsql

Réduire les expressions suivantes au même dénominateur :

$$A = \frac{7x}{x-2} - \frac{5}{3-x} \qquad B = 3 + \frac{5x}{2x+1}$$

$$A = \frac{7x}{x-2} - \frac{5}{3-x}$$
$$= \frac{7x(3-x)}{(x-2)(3-x)} - \frac{5(x-2)}{(3-x)(x-2)}$$
$$= \frac{7x(3-x) - 5(x-2)}{(x-2)(3-x)}$$
$$= \frac{21x - 7x^2 - 5x + 10}{(x-2)(3-x)}$$
$$= \frac{-7x^2 + 16x + 10}{(x-2)(3-x)}$$

$$B = 3 + \frac{5x}{2x+1}$$
$$= \frac{3}{1} + \frac{5x}{2x+1}$$
$$= \frac{3(2x+1)}{2x+1} + \frac{5x}{2x+1}$$
$$= \frac{3(2x+1)+5x}{2x+1}$$
$$= \frac{6x+3+5x}{2x+1}$$
$$= \frac{11x+3}{2x+1}$$