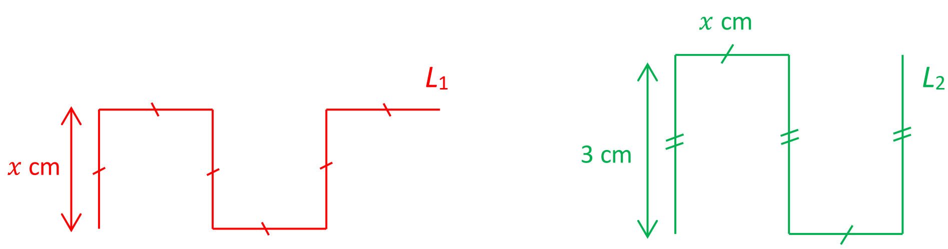
CALCUL LITTÉRAL

François Viète (1540,1603 ; conseiller d'*Henri IV*) est à l'origine du calcul avec des lettres. L'idée était ingénieuse de considérer dans les calculs l'inconnue comme si elle était connue.
En 1580, *Viète* est nommé conseiller privé d'*Henri IV*. Il est chargé de décrypter les messages secrets interceptés que s'envoient les espagnols. Il y arrive systématiquement ce qui provoque l'exaspération de ses ennemis qui finissent par l'accuser de sorcellerie et le dénoncer au Pape. Pour se défendre de ses accusateurs, *Viète* exposera en 1590 sa méthode dans un traité.

Partie 1 : Expression littérale

Exemple d'introduction :

On considère les deux frises L_1 et L_2 représentées ci-dessous.
Pour chacune d'elles, une longueur n'est pas connue. On choisit de la noter x.



On souhaite exprimer la longueur de ces frises. Comme la valeur de x n'est pas connue, on devra exprimer la longueur des frises en fonction de x.

Pour L_1 : La longueur de la frise est : $x + x + x + x + x + x = 6 \times x$

Pour L_2 : La longueur de la frise est : $3 + x + 3 + x + 3 = 2 \times x + 9$

Définition : Une **expression littérale** est un calcul contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres inconnus.

Méthode : Écrire une expression en fonction d'un nombre inconnu

Vidéo https://youtu.be/bpYh7tvfI_Y

On considère le programme de calcul :
- Choisir un nombre
- Ajouter 5
- Multiplier par 3
- Soustraire le nombre de départ.

a) Vérifier qu'en choisissant 1 au départ, on obtient 17 à la fin.
b) Qu'obtient-on en choisissant 3 au départ ?
c) Écrire une expression littérale correspondant à ce programme de calcul.

Correction

a) - Choisir un nombre → 1
- Ajouter 5 → $1 + 5 = 6$
- Multiplier par 3 → $3 \times 6 = 18$
- Soustraire le nombre de départ → $18 - 1 = 17$

On obtient bien 17 à la fin.

b) - Choisir un nombre → 3
- Ajouter 5 → $3 + 5 = 8$
- Multiplier par 3 → $3 \times 8 = 24$
- Soustraire le nombre de départ → $24 - 3 = 21$

On obtient 21 à la fin.

c) - Choisir un nombre → x
- Ajouter 5 → $x + 5$
- Multiplier par 3 → $3 \times (x + 5)$
- Soustraire le nombre de départ. → $3 \times (x + 5) - x$

Le programme de calcul correspond à l'expression littéral : $3 \times (x + 5) - x$

Partie 2 : Simplifications d'écriture

1) Premières règles d'écriture

Pour marquer la priorité de la multiplication, le symbole « × » peut être omis dans certaines situations.

$3 \times a$ s'écrit $3a$	$4 \times (a - 2)$ s'écrit $4(a - 2)$
$a \times b$ s'écrit ab	$15 + 4 \times a$ s'écrit $15 + 4a$

Notation introduite par l'allemand Michael Stifel en 1544

⚠ Attention :

● Les simplification d'écriture ne sont valables que pour des expressions littérales.
2×3 ne s'écrit évidemment pas 23 !

● Dans un produit, le nombre s'écrit devant la lettre. On écrit $2a$, mais on n'écrit pas $a2$.

Méthode : Simplifier l'écriture d'une expression littérale (1)

▶ **Vidéo** https://youtu.be/eBPOd0bTBro

Simplifier les expressions suivantes :

$4 \times a$	$b \times c$	$6 \times (3 - a)$	$10 + 5 \times a$
$x \times 7$	$2 \times a \times 5$	$4 \times 5 - 2 \times x$	

Correction

$4 \times a = 4a$ | $b \times c = bc$ | $6 \times (3-a) = 6(3-a)$ | $10 + 5 \times a = 10 + 5a$

$x \times 7 = 7x$ | $2 \times a \times 5 = 10a$ | $4 \times 5 - 2 \times x = 20 - 2x$

2) Nombres au carré, nombres au cube :

3×3 s'écrit 3^2 et se lit « 3 au carré ».

$5 \times 5 \times 5$ s'écrit 5^3 et se lit « 5 au cube ».

$x \times x$ s'écrit x^2 et se lit « x au carré ».

$x \times x \times x$ s'écrit x^3 et se lit « x au cube ».

Notation introduite par René Descartes XVIIe

Méthode : Simplifier l'écriture d'une expression littérale (2)

Vidéo https://youtu.be/x35fh5SVRMQ

Simplifier les expressions suivantes :

5×5 | $7 \times 7 \times 7$ | $a \times a$ | $b \times b \times b$

$3 \times a \times a$ | $a \times b \times a$ | $a \times a + a \times b$ | $4 \times 4 - b \times b$

Correction

$5 \times 5 = 5^2$ | $7 \times 7 \times 7 = 7^3$ | $a \times a = a^2$ | $b \times b \times b = b^3$

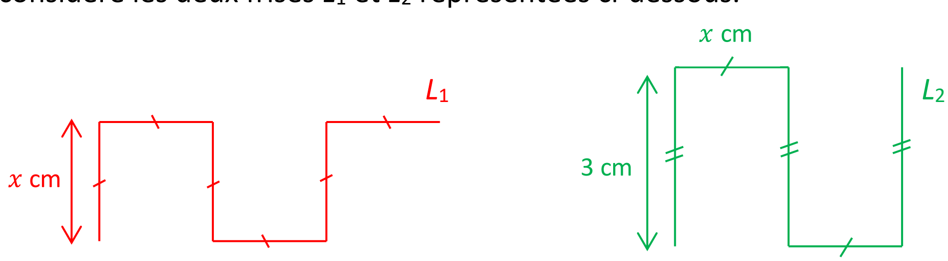
$3 \times a \times a = 3a^2$ | $a \times b \times a = a^2 b$ | $a \times a + a \times b = a^2 + ab$ | $4 \times 4 - b \times b = 4^2 - b^2$

Partie 3 : Appliquer une formule

Méthode : Appliquer une formule

Vidéo https://youtu.be/FOSVfFdDi7w

On considère les deux frises L_1 et L_2 représentées ci-dessous.



On a vu dans la partie 1 que :

- La longueur de la frise L_1 est égale à : $6 \times x$
- La longueur de la frise L_2 est égale à : $2 \times x + 9$

Calculer la longueur des frises L_1 et L_2 lorsque x = 4 cm.

Correction
Ici, x est connu, on peut donc remplacer x par 4 dans les deux formules :

Pour L_1 : La longueur de la frise est : $6 \times x = 6 \times 4 = 24\ cm$
Pour L_2 : La longueur de la frise est : $2 \times x + 9 = 2 \times 4 + 9 = 17\ cm$

Partie 4 : La distributivité

1) Formule de distributivité

Pour calculer mentalement 24 × 101, on effectue : 24 × (100 + 1) et…

$$24 \times (\,100 + 1\,) \;=\; \overset{\boxed{1}}{24 \times 100} + \overset{\boxed{2}}{24 \times 1}$$

Je distribue une multiplication par 24,
c'est la distributivité.

Ainsi : 24 × 101 = 2400 + 24 = 2424

Curiosité :
Si on traduit la formule de distributivité dans la langue française, cela pourrait donner ceci :

J'épluche et mange une banane
=
J'épluche une banane et je mange une banane

Sur une idée d'Adèle K.

Méthode : Appliquer la distributivité au calcul mental

Vidéo https://youtu.be/ByzozWOSOAY

Calculer astucieusement :
1) a) 32 × 101 b) 32 × 99 c) 13 × 102 d) 28 × 999
2) a) 131 × 13 + 131 × 87 b) 37 × 13 – 37 × 3

Correction

1) a) 32 × 101 = 32 × (100 + 1)
= 32 × 100 + 32 × 1 ← On distribue
= 3200 + 32 = 3232

b) 32 x 99 = 32 × (100 – 1)
= 32 × 100 – 32 × 1
= 3200 – 32 = 3168

c) 13 x 102 = 13 × (100 + 2)
= 13 × 100 + 13 × 2
= 1300 + 26 = 1326

L'astuce :
11 = 10 + 1
99 = 100 – 1
1001 = 1000 + 1
102 = 100 + 2
105 = 100 + 5
…

On connaît des règles de calcul mental pour multiplier par 10, par 100, par 1000, par 2, par 5, …
On décompose donc un des facteurs en somme ou différence formée de termes du type 10, 100, 1, 2, 5, …

d) $28 \times 999 = 28 \times (1000 - 1)$
$= 28 \times 1000 - 28 \times 1$
$= 28000 - 28 = 27972$

2) a) $131 \times 13 + 131 \times 87 = 131 \times (13 + 87)$
$= 131 \times 100 = 13100$

b) $37 \times 13 - 37 \times 3 = 37 \times (13 - 3)$
$= 37 \times 10$
$= 370$

L'astuce :
On reconnaît un facteur commun pour appliquer la formule de distributivité à l'envers.

2) Réduire une expression

Méthode : Réduire une expression

Vidéo https://youtu.be/qEUb4IU-HiY

Réduire les expressions suivantes :

$A = 4x + 3x$
$B = 2{,}4x + 1{,}3x$
$C = 2a + 4 - 3a + 6 - 2a + 8a - 8$

Correction

$A = 4x + 3x = (4 + 3)x = 7x$

$B = 2{,}4x + 1{,}3x = (2{,}4 + 1{,}3)x = 3{,}7x$

$C = 2a + 4 - 3a + 6 - 2a + 8a - 8$
$= 5a + 2$

Partie 5 : Tester une égalité

INCONNUE : C'est une lettre qui cache un nombre cherché :
→ x

ÉGALITÉ OU ÉQUATION : C'est une opération « à trous » dont « les trous » sont remplacés par une inconnue : → $11x - 7 = 6$

MEMBRES :
Une équation est composée de deux membres séparés par un signe « = ».

Exemple : $11x - 7 = 6$

1er membre 2e membre

Méthode : Tester une égalité

Vidéo https://youtu.be/xZCXVgGT_Bk
Vidéo https://youtu.be/pAJ6CBoCMGE

1) L'égalité $3x - 4 = 5 + 2x$ est-elle vraie dans les cas suivants :
a) $x = 0$ b) $x = 9$

2) A l'été, M. Bèhè, le berger, possédait 3 fois plus de moutons qu'au printemps. Lorsque arrive l'automne, il hérite de 13 nouveaux moutons. Il sera alors en possession d'un troupeau de 193 moutons.
On note x le nombre de moutons que M. Bèhè possédait au printemps.
a) Exprimer en fonction de x le nombre de moutons du troupeau à l'automne.
b) Écrire une égalité exprimant de deux façons différentes le nombre de moutons à l'automne.
c) Tester l'égalité pour différentes valeurs de x dans le but de trouver le nombre de moutons que M. Bèhè possédait au printemps.

Correction
1) a) Pour $x = 0$:
1er membre : $3x - 4 = 3 \times 0 - 4 = -4$
2^{e} membre : $5 + 2x = 5 + 2 \times 0 = 5$
Les deux membres n'ont pas la même valeur, donc l'égalité est fausse pour $x = 0$.

b) Pour $x = 9$:
1er membre : $3x - 4 = 3 \times 9 - 4 = 23$
2^{e} membre : $5 + 2x = 5 + 2 \times 9 = 23$
Les deux membres ont la même valeur, donc l'égalité est vraie pour $x = 9$.

2) a) $3x + 13$ b) $3x + 13 = 193$

c) Après de nombreux essais, on trouve $x = 60$. En effet :
1er membre : $3x + 13 = 3 \times 60 + 13 = 193$
2^{e} membre : 193
Les deux membres ont la même valeur, donc l'égalité est vraie pour $x = 60$.
Au printemps, M. Bèhè possédait 60 moutons.

TP info : « Tester une égalité »
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Tester_eg.pdf
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Tester_eg.ods (Feuille de calcul OOo)