

FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 3

Partie 1 : Définition

Exemples et contre-exemples :

- $f(x) = 4x^3 + 1$

- $g(x) = x^3 - 2$

sont des fonctions polynômes de degré 3.

- $f(x) = 1 + x^2 - 2x^3$

- $m(x) = -x + 4$

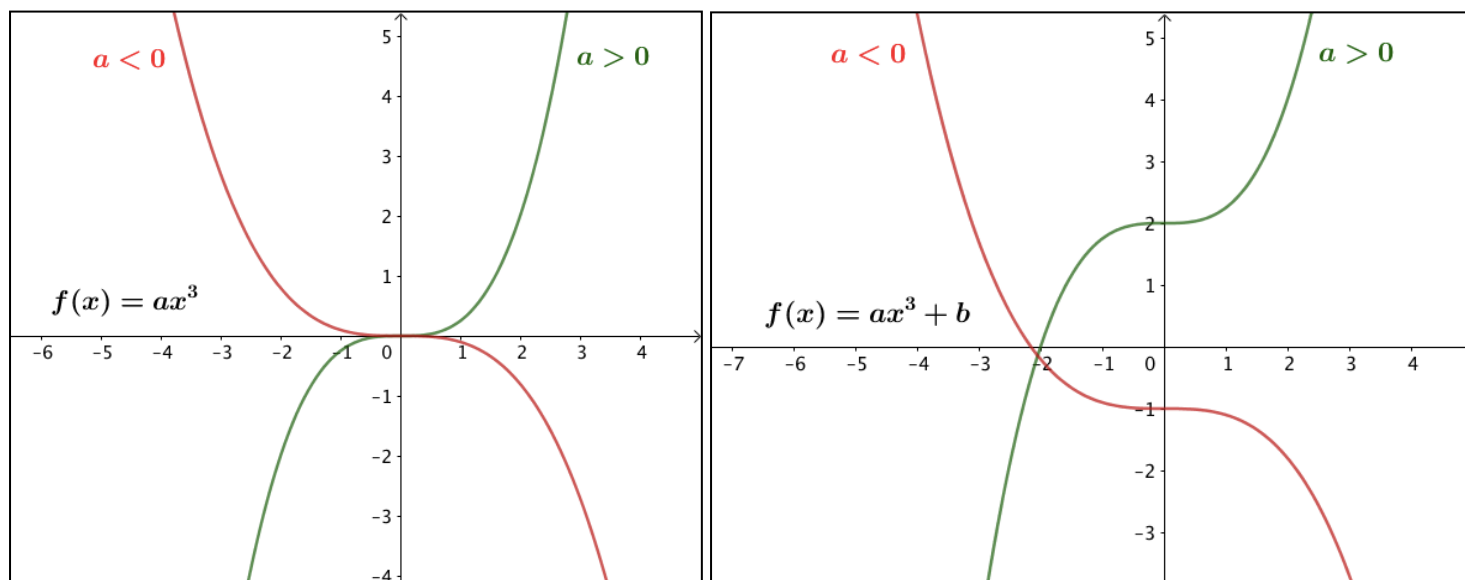
est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

- $n(x) = 2x^5 - x^3 + 5x - 1$ est une fonction polynôme de degré 5.

Définition : Les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ax^3$ ou $x \mapsto ax^3 + b$ sont des **fonctions polynômes de degré 3**.

Les coefficients a et b sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Partie 2 : Représentation graphique



Propriétés :

Soit f une fonction polynôme de degré 3, telle que $f(x) = ax^3 + b$.

- Si $a < 0$: f est strictement croissante.

- Si $a > 0$: f est strictement décroissante.

Partie 3 : Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3

Exemple :

La fonction f définie par $f(x) = 5(x - 4)(x - 1)(x + 3)$ est une fonction polynôme de degré 3 sous sa forme factorisée.

Si on développe l'expression de f à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient bien l'expression de degré 3 : $f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 55x + 60$

Développer(5(x-4)(x-1)(x+3))

→ **5 x³ - 10 x² - 55 x + 60**

Définition : Les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ sont des fonctions polynômes de degré 3.

Les coefficients a, x_1, x_2 et x_3 sont des réels avec $a \neq 0$.

En partant de l'expression développée précédente, on peut vérifier que 4, 1 et -3 sont des racines du polynôme f .

$$f(4) = 5 \times 4^3 - 10 \times 4^2 - 55 \times 4 + 60 = 320 - 160 - 220 + 60 = 0$$

$$f(1) = 5 \times 1^3 - 10 \times 1^2 - 55 \times 1 + 60 = 5 - 10 - 55 + 60 = 0$$

$$f(-3) = 5 \times (-3)^3 - 10 \times (-3)^2 - 55 \times (-3) + 60 = -135 - 90 + 165 + 60 = 0$$

4, 1 et -3, solutions de l'équation $f(x) = 0$, sont donc des racines de f .

Propriété : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

L'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions (éventuellement égales) : $x = x_1, x = x_2$ et $x = x_3$ appelées les **racines** de la fonction polynôme f .

Méthode : Étudier le signe d'un polynôme de degré 3

 Vidéo <https://youtu.be/g0PfyqHskBg>

Étudier le signe de la fonction polynôme f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2(x + 1)(x - 2)(x - 5)$$

Correction

2 étant un nombre positif, le signe de $2(x + 1)(x - 2)(x - 5)$ dépend du signe de chaque facteur : $x + 1, x - 2$ et $x - 5$.

On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

$$\begin{array}{ccccc} x + 1 = 0 & \text{ou} & x - 2 = 0 & \text{ou} & x - 5 = 0 \\ x = -1 & & x = 2 & & x = 5 \end{array}$$

-1 , 2 et 5 sont donc les racines du polynôme f .

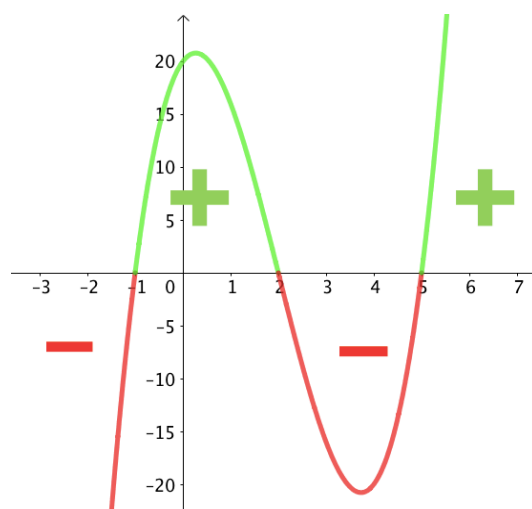
En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $f(x) = 2(x + 1)(x - 2)(x - 5)$.

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$		
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x - 5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-1 ; 2] \cup [5 ; +\infty[$ et

$f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty ; -1] \cup [2 ; 5]$.

La représentation de la fonction f à l'aide d'un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.



Partie 4 : Équation de la forme $x^3 = c$

Propriété :

L'équation $x^3 = c$, avec c positif, possède une unique solution $\sqrt[3]{c}$.

Cette solution peut également se noter $c^{\frac{1}{3}}$.

Méthode : Résoudre une équation du type $x^3 = c$

 Vidéo <https://youtu.be/4tQJRkplH3k>

Résoudre dans \mathbb{R} les équations : a) $x^3 = 27$, b) $2x^3 - 6 = 16$

Correction

a) On cherche le nombre qui, élevé au cube, donne 27.

Ce nombre est égal à la racine cubique de 27, soit : $x = \sqrt[3]{27} = 3$.

b) $2x^3 - 6 = 16$

$$2x^3 = 16 + 6$$

$$2x^3 = 22$$

$$x^3 = 11$$

L'équation admet donc une unique solution $x = \sqrt[3]{11}$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales