DÉRIVATION – Chapitre 2/2

Partie 1 : Fonction dérivée

Définition : La fonction qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

Notation : La fonction dérivée se note : f' ou $\frac{df}{dx}$

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$

Méthode : Dériver les fonctions usuelles

Vidéo https://youtu.be/kiemuwNkQhY

Calculer la dérivée de chacune des fonctions :

$f(x) = 100$; $g(x) = -5x$; $h(x) = x^4$; $k(x) = \frac{1}{x}$

Correction

$f(x) = 100 \rightarrow f'(x) = 0$
$g(x) = -5x \rightarrow g'(x) = -5$
$h(x) = x^4 \rightarrow h'(x) = 4x^3$
$k(x) = \frac{1}{x} \rightarrow k'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Premières formules d'opération sur les fonctions dérivées :

Fonction	Dérivée
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = ku(x), \ k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ku'(x)$

Méthode : Calculer des fonctions dérivées

Vidéo https://youtu.be/uTk3T_GfwYo

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f :

1) $f(x) = 3x$ 2) $f(x) = x^2 + 5$ 3) $f(x) = 5x^3$ 4) $f(x) = 3x^2 + \frac{4}{x}$

Correction

1) $f'(x) = 3$

2) $f'(x) = (x^2)' + (5)' = 2x + 0 = 2x$

3) $f'(x) = 5(x^3)' = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

4) $f'(x) = (3x^2)' + \left(\frac{4}{x}\right)' = 3 \times 2x + \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 6x - \frac{4}{x^2}$

Partie 2 : Fonction dérivée d'une fonction polynôme

1) Fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$.
Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

$$f(x) = 5x^{2} \quad -3\cancel{x} \quad \cancel{+2}$$

$$f'(x) = 2 \times 5x \quad -3$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2ax + b$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/5WDIrv_bEYE

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$ b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ c) $h(x) = -3x^2 + 2x + 8$
d) $k(x) = x^2 + x + 1$ e) $l(x) = 5x^2 + 5$ f) $m(x) = -x^2 + 7x$

Correction

a) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$ donc $f'(x) = 2 \times 4x - 6 = 8x - 6$
b) $g(x) = x^2 - 2x + 6$ donc $g'(x) = 2 \times x - 2 = 2x - 2$
c) $h(x) = -3x^2 + 2x + 8$ donc $h'(x) = 2 \times (-3)x + 2 = -6x + 2$
d) $k(x) = x^2 + 1x + 1$ donc $k'(x) = 2x + 1$
e) $l(x) = 5x^2 + 5$ donc $l'(x) = 2 \times 5x = 10x$
f) $m(x) = -x^2 + 7x$ donc $m'(x) = -2x + 7$

2) Fonction polynôme de degré 3

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par :
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1.$
Pour déterminer la fonction dérivée f', on applique la technique suivante :

$$f(x) = 2x^{3\,2} - 3x^{2} + 5\cancel{x} \cancel{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times 3x + 5$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$
On appelle **fonction dérivée** de f, notée f', la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$
b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$
c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$
d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$
e) $l(x) = 4x^3 + 1$
f) $m(x) = -x^3 + 7x$

Correction

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ donc $f'(x) = 3 \times x^2 - 2 \times 3x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$

b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$ donc $g'(x) = 3 \times 5x^2 + 2 \times 2x + 2 = 15x^2 + 4x + 2$

c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$ donc $h'(x) = 3 \times (-2)x^2 - 2 \times 3x - 7 = -6x^2 - 6x - 7$

d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ donc $k'(x) = -3x^2 + 2 \times x = -3x^2 + 2x$

e) $l(x) = 4x^3 + 1$ donc $l'(x) = 3 \times 4x^2 = 12x^2$

f) $m(x) = -x^3 + 7x$ donc $m'(x) = -3x^2 + 7$

Partie 3 : Opérations sur les fonctions dérivées

1) Produit et quotient de fonctions dérivées :

Fonction	**Dérivée**
$f(x) = u(x)v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk
Vidéo https://youtu.be/OMsZNNIIdrw
Vidéo https://youtu.be/jOuC7aq3YkM
Vidéo https://youtu.be/-MfEczGz_6Y

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$ b) $g(x) = \dfrac{1}{2x^2+5x}$ c) $h(x) = \dfrac{6x-5}{x^2-2x-1}$

Correction

a) $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x \rightarrow u'(x) = 6x + 4$
$v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5$

Donc : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$= (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5$
$= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x$
$= 45x^2 + 34x - 4$

b) $g(x)=\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=2x^2+5x \rightarrow u'(x)=4x+5$

Donc : $g'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{4x+5}{(2x^2+5x)^2}$

c) $h(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=6x-5 \rightarrow u'(x)=6$

$v(x)=x^2-2x-1 \rightarrow v'(x)=2x-2$

Donc : $h'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$=\frac{6(x^2-2x-1)-(6x-5)(2x-2)}{(x^2-2x-1)^2}$

$=\frac{6x^2-12x-6-12x^2+12x+10x-10}{(x^3-2x^2-1)^2}$

$=\frac{-6x^2+10x-16}{(x^2-2x-1)^2}$

2) Dérivées de fonctions composées

Fonction	**Dérivée**
$A\cos(\omega t+\varphi)$	$-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$
$A\sin(\omega t+\varphi)$	$A\omega\cos(\omega t+\varphi)$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Méthode : Calculer les dérivées de fonctions composées

Vidéo https://youtu.be/Py4f2YAwebA

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=3\cos(2t+\pi)$

2) $g(x)=-4\sin\left(-3t-\frac{\pi}{4}\right)$

Correction

1) $f(x)=3\cos(2t+\pi)$

donc :

$f'(x)=-3\times 2\sin(2t+\pi)$

$=-6\sin(2t+\pi)$

2) $g(x)=-4\sin\left(-3t-\frac{\pi}{4}\right)$

donc :

$g'(x)=-4\times(-3)\cos\left(-3t-\frac{\pi}{4}\right)$

$=12\cos\left(-3t-\frac{\pi}{4}\right)$

Partie 4 : Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème :
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante.

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Vidéo https://youtu.be/EXTobPZzORo
Vidéo https://youtu.be/zxyKLqnlMIk

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.
a) Calculer la fonction dérivée de f.
b) Déterminer le signe de f ' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.

Correction

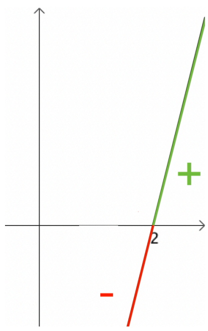
a) $f'(x) = 2 \times 2x - 8 = 4x - 8$.

b) Étude du signe de la dérivée :
On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit : $4x - 8 = 0$

$$4x = 8$$

$$x = \frac{8}{4} = 2.$$

La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.
Donc f' est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = 2$) puis positive (après $x = 2$).



c) On dresse le tableau de variations en appliquant le théorème :

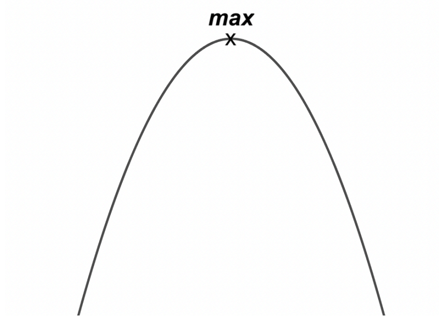
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

$f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.

Partie 5 : Extremum d'une fonction

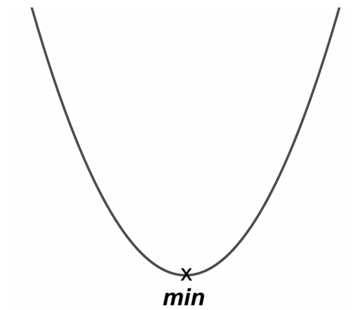
La fonction admet un **maximum** au point où la dérivée s'annule et change de signe.

x			
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	max	↘



La fonction admet un **minimum** au point où la dérivée s'annule et change de signe.

x			
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	min	↗



Théorème : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si la dérivée f' s'annule et change de signe en un réel c alors f admet un extremum en $x = c$.

Méthode : Déterminer un extremum d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/zxyKLqnlMIk

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$.
a) Calculer la fonction dérivée f' de f.
b) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
c) Dresser le tableau de variations de f.
d) En déduire que la fonction f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. On précisera la valeur où il est atteint.

Correction
a) $f'(x) = 10x - 10$

b) Étude du signe de la dérivée :
On commence par résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Soit : $10x - 10 = 0$

$$10x = 10$$

$$x = \frac{10}{10} = 1.$$

La fonction f' est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 10 est positif.
f' est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = 1$) puis positive (après $x = 1$).

c) On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

$f(1) = 5 \times 1^2 - 10 \times 1 + 1 = -4$

d) On lit dans le tableau de variations que la fonction f admet un minimum égal à -4 en $x = 1$.