DÉRIVATION (Partie 1)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/uMSNIlPBFhQ

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{(x+1)^2-1}{x}$.
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim_{x\to 0} f(x)=2$.

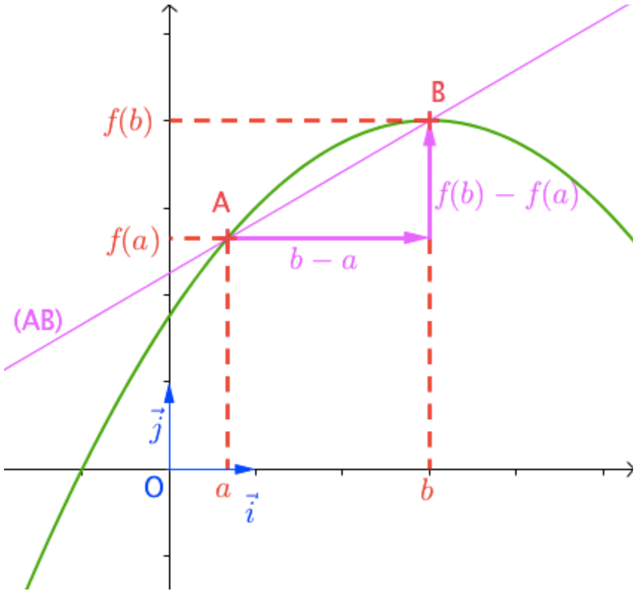
2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x^2}$.
A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :
$\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

Définition : On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0.
On note : $\lim_{x\to 0} f(x)=L$ et on lit : La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à L.

II. Nombre dérivé

1) Rappel : Pente d'une droite

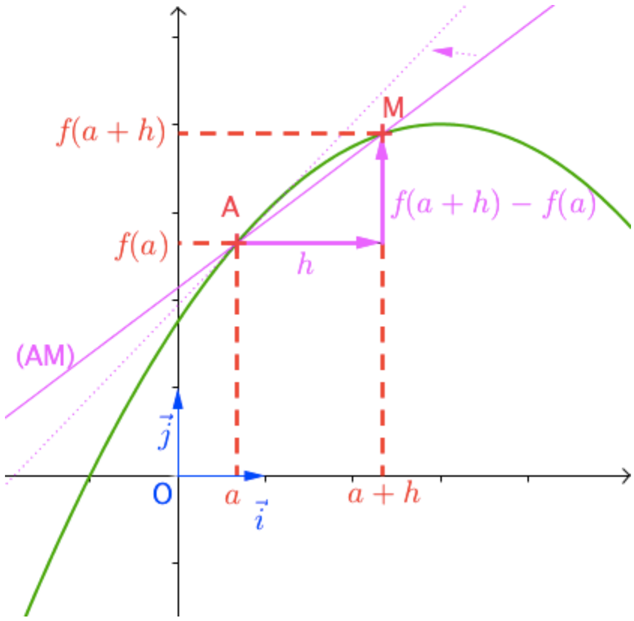
Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a<b$.
Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et b.
La pente (ou le coefficient directeur) de la droite (AB) est égal à : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



2) <u>Fonction dérivable</u>

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
Soit un réel a appartenant à I.
Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$.
La pente de la droite (AM) est égale à :
$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, la pente de la droite (AM) est égale à la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
Cette pente s'appelle le nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.



<u>Définition :</u> On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel *L*, tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
L est appelé le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$.

<u>Méthode :</u> Démontrer qu'une fonction est dérivable

Vidéo https://youtu.be/UmT0Gov6yyE
Vidéo https://youtu.be/Iv5_mw1EYBE

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.

On commence par calculer $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$:

$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$= \frac{(2+h)^2+2(2+h)-3-2^2-2\times2+3}{h}$

$= \frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}$

$= \frac{6h+h^2}{h}$

$= \frac{h(6+h)}{h}$

$= 6+h$

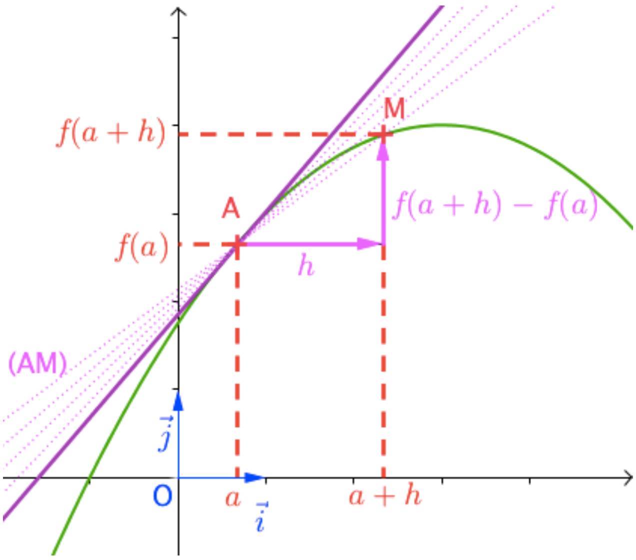
Donc : $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to0} 6+h = 6$

On en déduit que f est dérivable en $x=2$. Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6 et on note : $f'(2)=6$.

III. Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
$f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de pente le nombre dérivé $f'(a)$.

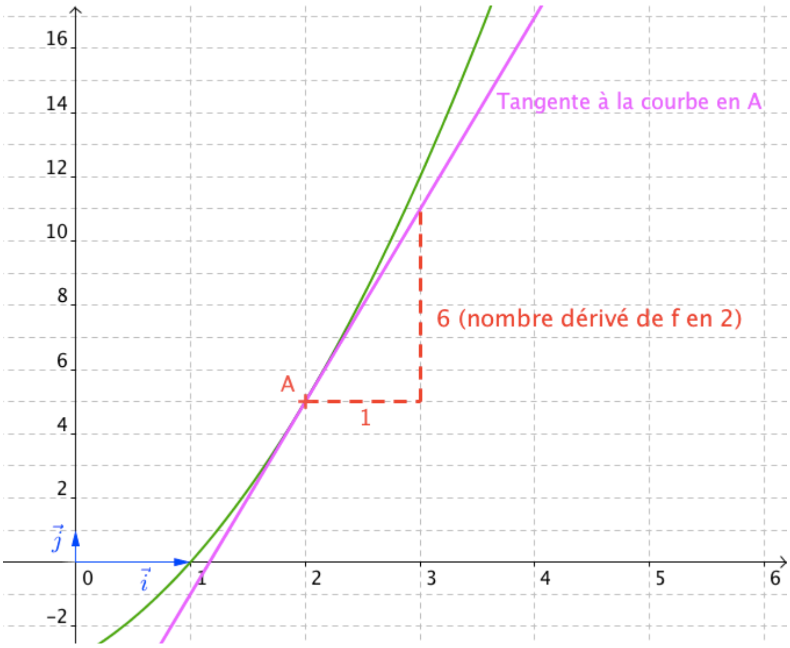


Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/0jhxK55jONs

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont la dérivabilité en 2 a été étudiée plus haut.
Déterminer la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

On a vu que le nombre dérivé de f en 2 vaut 6.
Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de pente (coefficient directeur) 6.



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/Jj0ql6-o2Uo

La tangente a pour pente $f'(a)$ donc son équation est de la forme : $y = f'(a)x + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons b :
La tangente passe par le point A$\big(a\,;f(a)\big)$, donc :
$f(a) = f'(a) \times a + b$ soit : $b = f(a) - f'(a) \times a$
On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :
$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/fKEGoo50Xmo
Vidéo https://youtu.be/7-z62dSkkTQ

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

On a vu plus haut que la pente de la tangente est égal à 6.
Donc son équation est de la forme : $y = 6(x - 2) + f(2)$, soit :
$y = 6(x - 2) + 2^2 + 2 \times 2 - 3$
$y = 6x - 7$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.