

DÉRIVATION – Chapitre 2/3

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/uMSNIIPBFHQ>

Partie 1 : Dérivées des fonctions usuelles

1) Exemple :

Démonstration au programme : Dérivée de la fonction carré

▶ Vidéo <https://youtu.be/-nRmE8yFSSg>

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.
Démontrons que pour tout x réel, on : $f'(x) = 2x$.

Calculons le nombre dérivé de la fonction f en a (nombre réel quelconque).

$$\text{Pour } h \neq 0 : \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$$

$$\text{Or : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$$

Pour tout nombre a , on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $2a$.

On a donc défini sur \mathbb{R} une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.

Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f .



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».

Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Démonstration au programme : Dérivée de la fonction inverse

▶ Vidéo <https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk>

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Pour $h \neq 0$ et $h \neq -a$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

$$\text{Or : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{a(a+h)} \right) = -\frac{1}{a^2}$$

Pour tout nombre a , on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Définitions :

On dit que la fonction f est **dérivable** sur un intervalle I , si elle est dérivable en tout réel x de I .

Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .

2) Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Méthode : Dériver les fonctions usuelles

 Vidéo <https://youtu.be/9Mann4wOGJA>

Calculer la dérivée de chacune des fonctions :

$$f(x) = 100 ; g(x) = -5x ; h(x) = x^4 ; k(x) = \frac{1}{x^5} ; m(x) = \sqrt{x}$$

Correction

$$f(x) = 100 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$g(x) = -5x \rightarrow g'(x) = -5$$

$$h(x) = x^4 \rightarrow h'(x) = 4x^3$$

$$k(x) = \frac{1}{x^5} \rightarrow k'(x) = -\frac{5}{x^6}$$

$$m(x) = \sqrt{x} \rightarrow m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3) Cas de la fonction racine carrée

On peut lire dans le tableau plus haut que la fonction racine carrée est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ mais dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Démonstration au programme : Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

▶ Vidéo <https://youtu.be/N5wnOoLDrjo>

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

On calcule le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\text{Pour } h > 0 : \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}\sqrt{h}}{h\sqrt{h}} = \frac{h}{h\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\text{Or : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

En effet, lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Géométriquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente **verticale** en 0.



Partie 2 : Opérations sur les fonctions dérivées

1) Opérations sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables.

Fonction	Dérivée
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = ku(x), k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = ku'(x)$
$f(x) = u(x)v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \frac{1}{u(x)}$	$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Démonstration au programme pour le produit :

▶ Vidéo <https://youtu.be/PI4A8TLGnxE>

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

On veut démontrer que pour tout a de I , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

$$\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{(u(a+h) - u(a))v(a+h) + u(a)(v(a+h) - v(a))}{h} \\
&= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h}
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$$

Car u et v sont dérivables sur I .

$$\text{Et, } \lim_{h \rightarrow 0} v(a+h) = v(a).$$

$$\text{Soit, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

$$\text{Ainsi : } (uv)' = u'v + uv'$$

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

▶ Vidéo <https://youtu.be/ehHoLK98Ht0>

▶ Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk

▶ Vidéo <https://youtu.be/OMsZNNIldrw>

▶ Vidéo <https://youtu.be/jOuC7aq3YkM>

▶ Vidéo https://youtu.be/-MfEczGz_6Y

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de f :

a) $f(x) = 3x^2 + 4\sqrt{x}$

b) $f(x) = 5x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = (3x^2 + 4x)(5x - 1)$

d) $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 5x}$

e) $f(x) = \frac{6x-5}{x^2-2x-1}$

Correction

a) $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 \rightarrow u'(x) = 3 \times 2x = 6x$

$$v(x) = 4\sqrt{x} \rightarrow v'(x) = 4 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Donc : } f'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

b) $f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 5x^3 \rightarrow u'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

$$v(x) = -3x^2 \rightarrow v'(x) = -3 \times 2x = -6x$$

$$\text{Donc : } f'(x) = u'(x) + v'(x) = 15x^2 + (-6x) = 15x^2 - 6x$$

c) $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x^2 + 4x \rightarrow u'(x) = 6x + 4$

$$v(x) = 5x - 1 \rightarrow v'(x) = 5$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc : } f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= (6x + 4)(5x - 1) + (3x^2 + 4x) \times 5 \\
&= 30x^2 - 6x + 20x - 4 + 15x^2 + 20x
\end{aligned}$$

$$= 45x^2 + 34x - 4$$

d) $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 2x^2 + 5x \rightarrow u'(x) = 4x + 5$

$$\text{Donc : } f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{4x+5}{(2x^2+5x)^2}$$

e) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6$

$$v(x) = x^2 - 2x - 1 \rightarrow v'(x) = 2x - 2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{6(x^2 - 2x - 1) - (6x - 5)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 1)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 12x - 6 - 12x^2 + 12x + 10x - 10}{(x^2 - 2x - 1)^2} \\ &= \frac{-6x^2 + 10x - 16}{(x^2 - 2x - 1)^2} \end{aligned}$$

2) Dérivée d'une fonction composée

Fonction	Dérivée
$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$

Méthode : Dériver une fonction composée $f(ax + b)$

▶ Vidéo <https://youtu.be/aFkPQkg0p-A>

Calculer les fonctions dérivées des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = (7x + 1)^3 \quad h(x) = \sqrt{5x - 4}$$

Correction

1) $g(x) = (7x + 1)^3$

$$g'(x) = 7 \times 3(7x + 1)^2 = 21(7x + 1)^2$$

En effet, la dérivée de la fonction cube est $(x^3)' = 3x^2$

2) $h(x) = \sqrt{5x - 4}$

$$h'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{5x-4}} = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}$$

En effet, la dérivée de la fonction racine carrée est $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales