

# DÉRIVATION (Partie I)



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».

Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

## I. Limite en zéro d'une fonction

Exemple :

1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$ .

L'image de 0 par la fonction  $f$  n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de  $f(x)$  lorsque  $x$  se rapproche de 0.

$x$	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que  $f(x)$  se rapproche de 2 lorsque  $x$  se rapproche de 0.

On dit que la limite de  $f$  lorsque  $x$  tend vers 0 est égale à 2 et on note :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ .

## II. Nombre dérivé

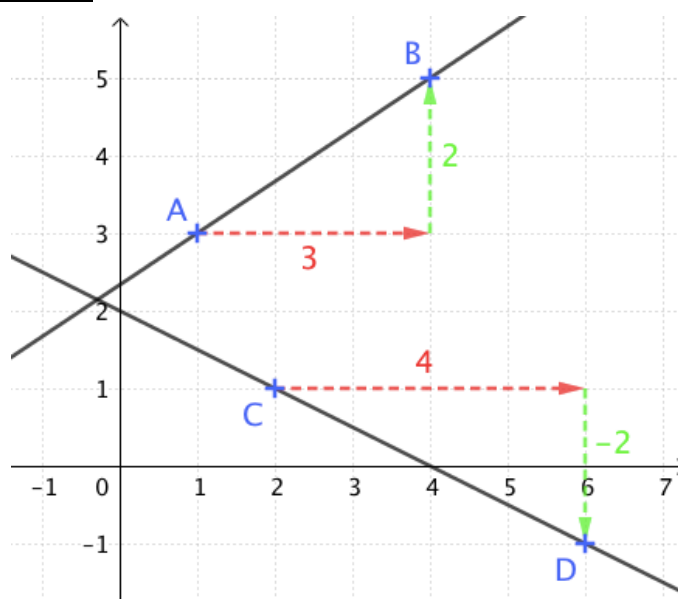
### 1) Rappel : Coefficient directeur d'une droite

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à :

$$\frac{5 - 3}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

Le coefficient directeur de la droite (CD) est égal à :

$$\frac{-1 - 1}{6 - 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$



## 2) Fonction dérivable

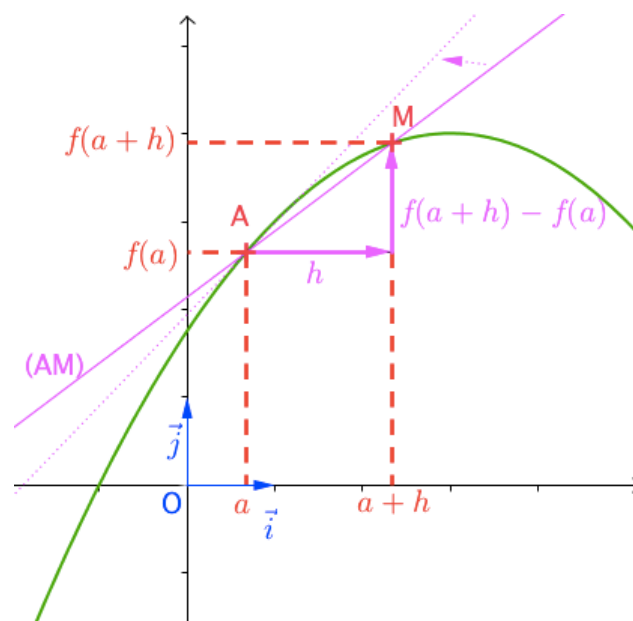
Soit une fonction  $f$ .

Soit A et M deux points de la courbe représentative de  $f$  d'abscisses respectives  $a$  et  $a+h$ .

Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à :  $\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ .

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  lorsque  $h$  tend vers 0.

Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et on le note  $f'(a)$ .



### Méthode : Calculer le nombre dérivé

► Vidéo <https://youtu.be/UmT0Gov6yyE>

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .

Calculer le nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $x = 2$ .

- On commence par calculer  $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 2^2 - 2 \times 2 + 3}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(6+h)}{h} \\ &= 6 + h \end{aligned}$$

- On calcule la limite de  $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$  lorsque  $h$  tend vers 0 :

$$\text{Donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 6 + h = 6$$

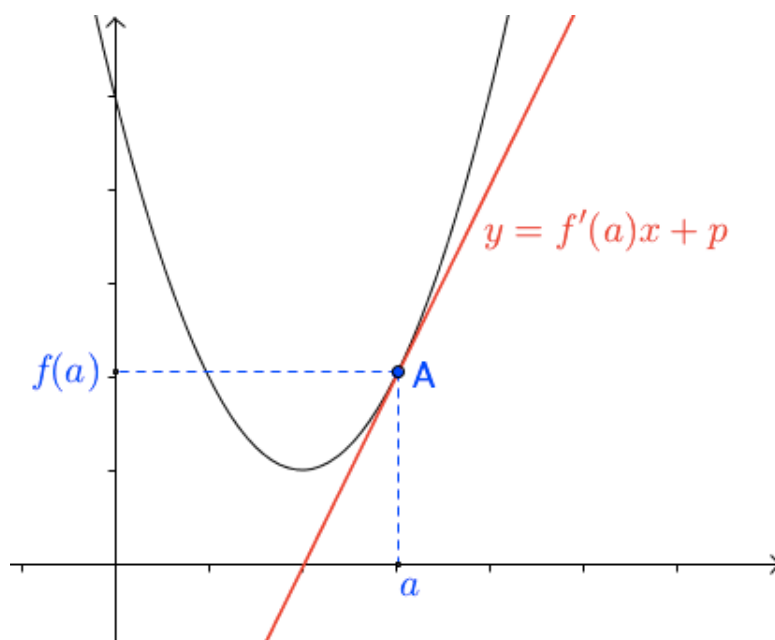
Le nombre dérivé de  $f$  en 2 est égal à 6. Et on note  $f'(2) = 6$ .

Le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  est :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

### III. Tangente à une courbe

A est un point d'abscisse  $a$  appartenant à la courbe représentative d'une fonction  $f$ .



**Définition :** La **tangente** à la courbe au point A d'abscisse  $a$  est la droite :

- passant par A,
- de coefficient directeur le nombre dérivé  $f'(a)$ .

**Méthode :** Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

▶ **Vidéo** <https://youtu.be/0jhxK55jONs>

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  dont le nombre dérivé en 2 a été calculé plus haut.

- 1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point A de la courbe d'abscisse 2.
- 2) a) Construire la tangente à la courbe de la fonction  $f$  en 2.  
b) En s'aidant de la calculatrice graphique, reproduire la courbe de la fonction  $f$ .
- 3) Donner une équation de la tangente.

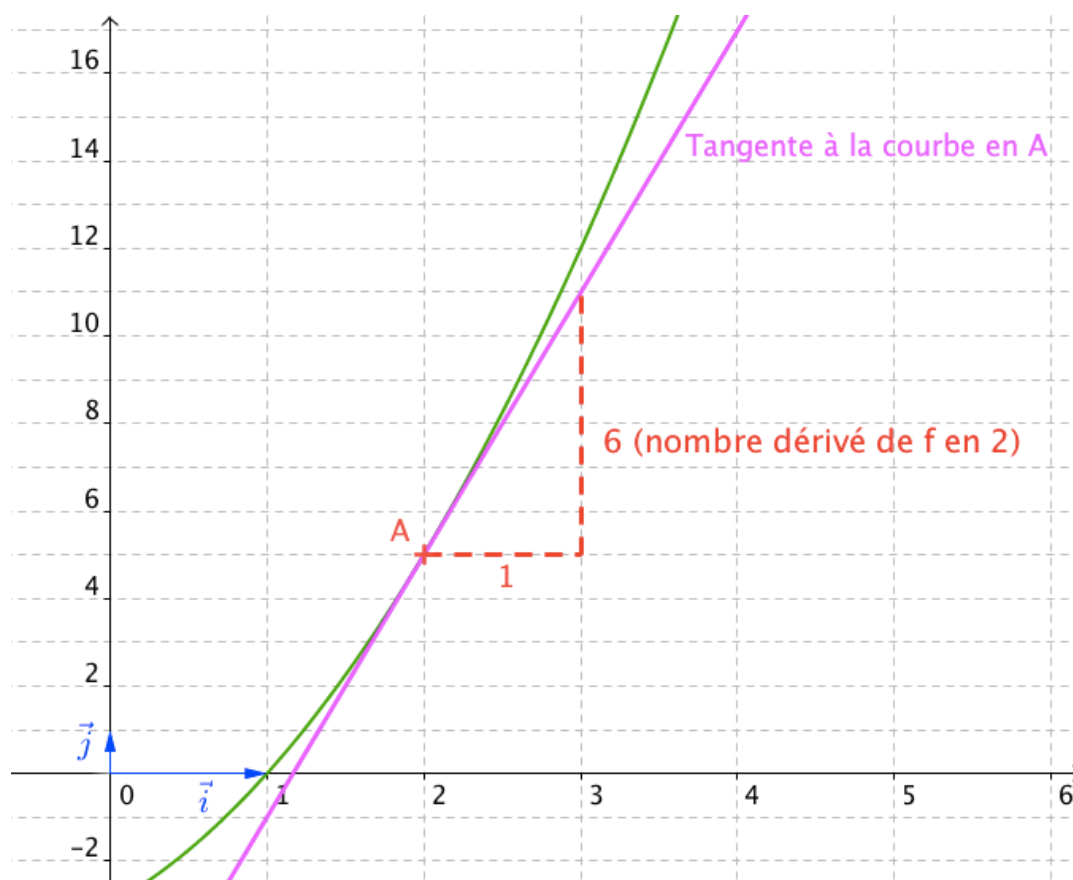
1) On a vu que le nombre dérivé de  $f$  en 2 est égal à 6.

Ainsi la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.

2) - On commence par placer le point A de coordonnées  $(2 ; f(2))$ , avec  $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$ .

- On trace la tangente passant par A et de coefficient directeur 6.

Pour cela, on avance de 1 dans le sens des abscisses puis de 6 dans le sens des ordonnées.



3) Une équation de la tangente en 2 est de la forme  $y = 6x + p$ .

Pour calculer  $p$ , on sait que le point A appartient à la tangente donc ses coordonnées (2 ; 5) vérifient l'équation de la tangente  $y = 6x + p$ .

$$\text{Donc } 5 = 6 \times 2 + p$$

$$\text{Et donc } p = 5 - 12 = -7$$

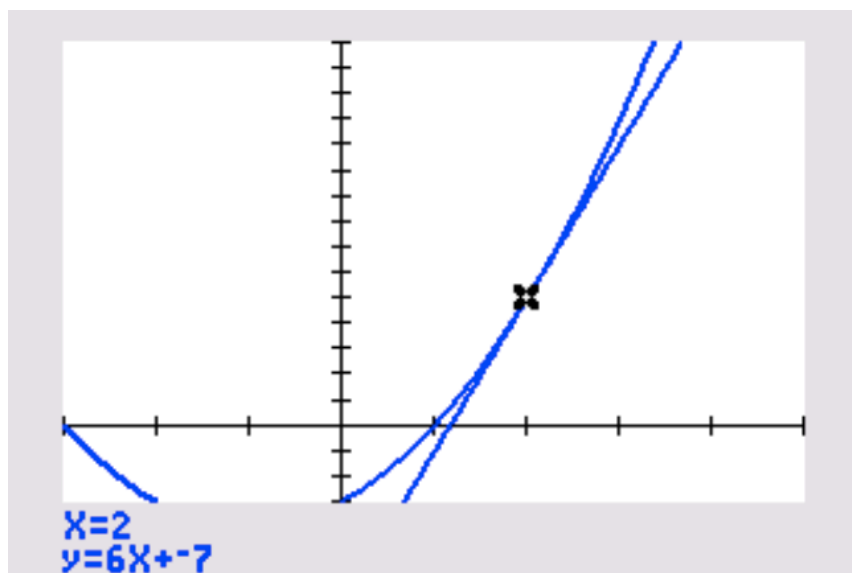
Une équation de tangente à la courbe représentative de  $f$  au point A d'abscisse 2 est  $y = 6x - 7$ .

À l'aide de la calculatrice, il est possible de tracer la tangente à une courbe en un point.

Une fois la courbe tracée sur la calculatrice, saisir :

**Avec TI-83 :** Touches « 2<sup>nde</sup> » + « PGRM » (Dessin) puis « 5: Tangente » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « ENTER ».

**Casio 35+ :** Touches « SHIFT » + « F4 » (Skech) puis « Tang » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « EXE » + « EXE ».



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)