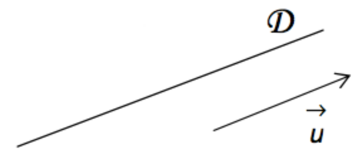
DROITES DU PLAN

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/d-rUnClmcCY

I. Vecteur directeur d'une droite

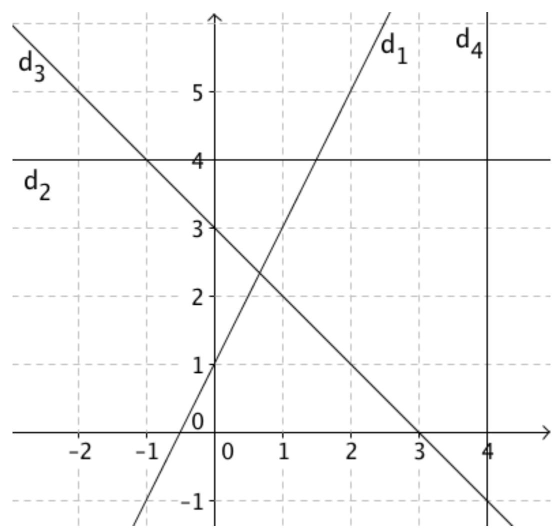
Définition :
D est une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite D.



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

Vidéo https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4.



Pour d_1 : $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ou encore $\vec{c}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

Pour d_2 : $\vec{d}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

Pour d_3 : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Pour d_4 : $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ ou encore $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$.

II. Équation cartésienne d'une droite

Théorème et définition :
Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(-b\,;a)$.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/GVDUrdsRUdA

Soit $A(x_0\,;\,y_0)$ un point de la droite D et $\vec{u}(\alpha\,;\,\beta)$ un vecteur directeur de D.

Un point M(x ; y) appartient à la droite D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) = 0$ soit encore $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha \\ y-y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$.

Donc : $\beta(x-x_0) - \alpha(y-y_0) = 0$

$\beta x - \beta x_0 - \alpha y + \alpha y_0 = 0$

$\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$

Cette équation peut s'écrire : $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$ et $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$.
Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $(\alpha\,;\,\beta) = (-b\,;a)$.

Exemple :
Soit une droite *d* d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$.
Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (5 ; 4) est un vecteur directeur de *d*.

Théorème réciproque :
L'ensemble des points M(x ; y) tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ est une droite D de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.

- Admis -

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Vidéo https://youtu.be/rLxQlbQkPsQ
Vidéo https://youtu.be/NosYmlLLFB4
Vidéo https://youtu.be/i5WD8IZdEqk

On considère un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.
1) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par le point *A*(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (–1 ; 5).

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d'* passant par les points *B*(5 ; 3) et *C*(1 ; –3).

1) Soit un point *M*(x ; y) de la droite *d*.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) = 0$ soit encore $\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ y-1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.
Donc : $5(x-3) - (-1)(y-1) = 0$.
Ou encore : $5x + y - 16 = 0$.
Une équation cartésienne de *d* est : $5x + y - 16 = 0$.

Remarque :
Une autre méthode consiste à appliquer directement le premier théorème énoncé plus haut.
Ainsi, comme $\vec{u}$ (–1 ; 5) est un vecteur directeur de *d*, une équation de *d* est de la forme :

$\color{green}{5}x + \color{red}{1}y + c = 0$.
Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de *A* dans l'équation.

2) *B* et *C* appartiennent à *d'* donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de *d'*.
On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.
Une équation cartésienne de *d'* est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.
B(5 ; 3) appartient à *d'* donc : –6 x 5 + 4 x 3 + c = 0 donc c = 18.
Une équation cartésienne de *d'* est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $3x - 2y - 9 = 0$.

Tracer une droite dans un repère :

Vidéo https://youtu.be/EchUv2cGtzo

III. Équation réduite d'une droite

1) De l'équation cartésienne à l'équation réduite

- Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Et on note $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{d}$.

Vocabulaire : - m est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite D.
- p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite D.

Remarque : Dans l'équation réduite, on retrouve l'expression d'une fonction affine.

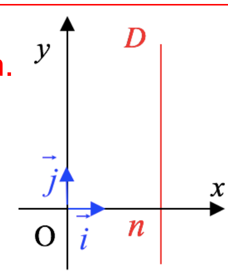
- Si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à l'équation réduite $x = -\frac{c}{a}$. Dans ce cas, la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées.

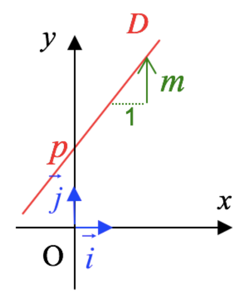
Exemple : Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$.
Son équation réduite est $y = -4x + 6$.

Propriété :
Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan.

- Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de D est de la forme $x = n$,
où n est un nombre réel.

- Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de D est de la forme $y = mx + p$,
où m et p sont deux nombres réels.





<u>Exercice :</u> Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5$ c) $4x + 2y = 1$

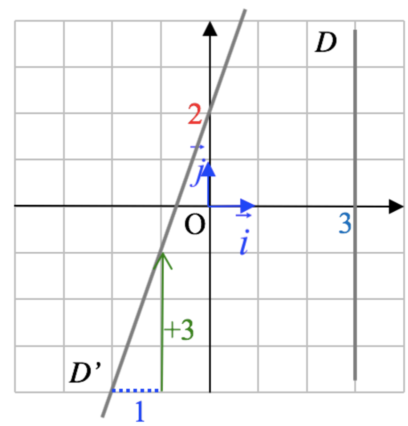
a) Coefficient directeur : –2
Ordonnée à l'origine : 3

b) Coefficient directeur : 0
Ordonnée à l'origine : 5

b) L'équation peut s'écrire : $y = -2x + \frac{1}{2}$
Coefficient directeur : –2
Ordonnée à l'origine : $\frac{1}{2}$

<u>Exemples :</u>

La droite D a pour équation $x = 3$
La droite D' a pour équation $y = 3x + 2$.
Son ordonnée à l'origine est 2 et son coefficient directeur est +3.



<u>Méthode :</u> Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée

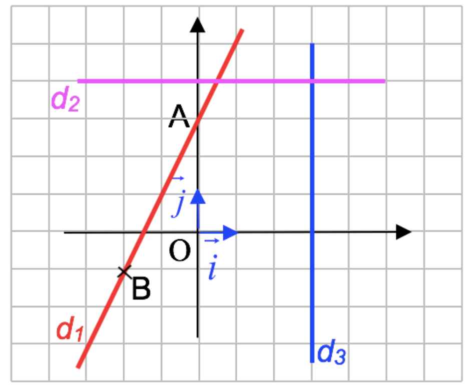
Vidéo https://youtu.be/cUdhxkaTqqk

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Dans ce repère, tracer les droites *d₁*, *d₂* et *d₃* d'équations réduites respectives :
$y = 2x + 3$,
$y = 4$,
$x = 3$.

- La droite d_1 d'équation $y = 2x + 3$ a pour ordonnée à l'origine 3. Donc le point A de coordonnée $\binom{0}{3}$ appartient à la droite d_1.
Soit B le point d'abscisse –2 appartenant à la droite d_1. Les coordonnées de B vérifient l'équation de d_1, donc :
y_B = 2x(–2) + 3 = –1.
Le point B de coordonnées $\binom{-2}{-1}$ appartient à la droite d_1.
On peut ainsi tracer la droite d_1 passant par A et B.

- La droite d_2 d'équation $y = 4$ est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à 4. La droite d_2 est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses coupant l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\binom{0}{4}$.

Pour tracer la droite d_2, on aurait également pu remarquer que son coefficient directeur est nul.
- La droite d_3 d'équation $x = 3$ est l'ensemble des points dont l'abscisse est égale à 3.
La droite d_3 est donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées coupant l'axe des abscisses au point de coordonnées $\binom{3}{0}$.



Propriété réciproque :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et m, p, n trois nombres réels, m étant non nul.
L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $\binom{x}{y}$ sont tels que :
$y = mx + p$ ou $x = n$, est une droite.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

Vidéo https://youtu.be/XA0YajthETQ

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Les points A$\binom{6,4}{42}$ et B$\binom{346}{2419}$ appartiennent-ils à la droite *d* d'équation $y = 7x - 3$?

- Dire que le point A$\binom{6,4}{42}$ appartient à la droite *d* d'équation $y = 7x - 3$ revient à dire que les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite *d*.
Ce qui n'est pas le cas, puisque 42 ≠ 7 x 6,4 – 3 = 41,8.
Le point A n'appartient donc pas à la droite *d*.

- Les coordonnées de B$\binom{346}{2419}$ vérifient l'équation de la droite *d*. En effet :
2419 = 7 x 346 – 3 donc le point B appartient à la droite *d*.

Remarque : Pour démontrer que 3 points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer par exemple que le point A vérifie l'équation de la droite (BC).

2) Pente d'une droite

Propriété :
Si A$\binom{x_A}{y_A}$ et B$\binom{x_B}{y_B}$ sont deux points distincts d'une droite D tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite D a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

Vidéo https://youtu.be/tfagLy6QRuw

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Soit A$\binom{4}{-1}$ et B$\binom{3}{5}$ deux points d'une droite *d*.
Déterminer une équation de la droite *d*.

Les points A et B sont d'abscisses différentes donc la droite *d* n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle est donc de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

Le coefficient directeur de *d* est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-(-1)}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6$.

L'équation de *d* est donc de la forme : $y = -6x + p$

Comme A$\binom{4}{-1}$ appartient à la droite *d*, ses coordonnées vérifient l'équation de *d* soit :

$-1 = -6 \times 4 + p$. D'où $p = -1 + 6 \times 4 = 23$

Une équation de *d* est donc : $y = -6x + 23$.

ALGORITHME

```
def droite(xA,yA,xB,yB):
    m=...
    p=...
    print('y=',m,'x+',p)
```

TP avec Python : Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés
https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_EqDroite.pdf

IV. Position relative de deux droites

1) A partir l'aide de l'équation cartésienne

Propriété :
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles

Vidéo https://youtu.be/NjsVdVolhvU

Démontrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ et $-9x + 15y = 0$ sont parallèles.

Le vecteur $\vec{u}(10\,;6)$ est un vecteur directeur de la droite d_1.
Le vecteur $\vec{v}(-15\,;-9)$ est un vecteur directeur de la droite d_2.
Calculons $det(\vec{u}\,;\vec{v})$:

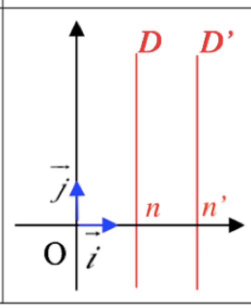
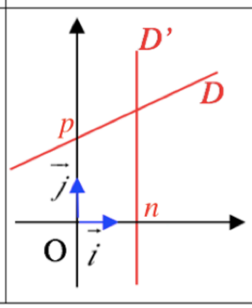
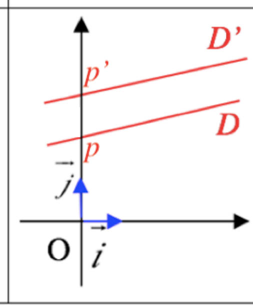
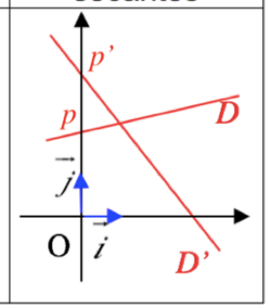
$$det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

2) A l'aide de l'équation réduite

Propriété :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Soit D et D' deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

Tableau récapitulatif :

Equation de D	$x = n$	$y = mx + p$	$y = mx + p$	
Equation de D'	$x = n'$	$x = n$	$y = m'x + p'$	
			Si $m = m'$	Si $m \neq m'$
Position de D et D'	$D \,//\, D'$	D et D' sont sécantes	$D \,//\, D'$	D et D' sont sécantes
Représentation				

Vidéo https://youtu.be/gTUPGw7Bulc

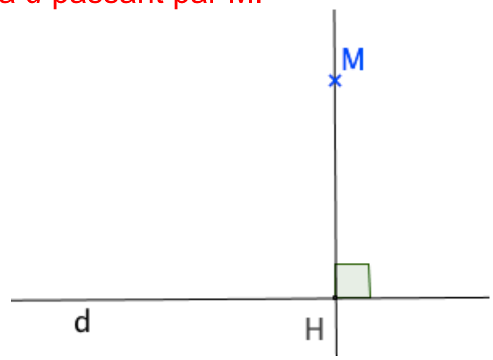
Exemples :
Dans un repère du plan, d_1, d_2 et d_3 admettent pour équations respectives :

$$y = 3x + 4,\ \ y = 3x + 9,\ x = 8$$

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.
Les droites d_1 et d_3 sont sécantes.

V. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.

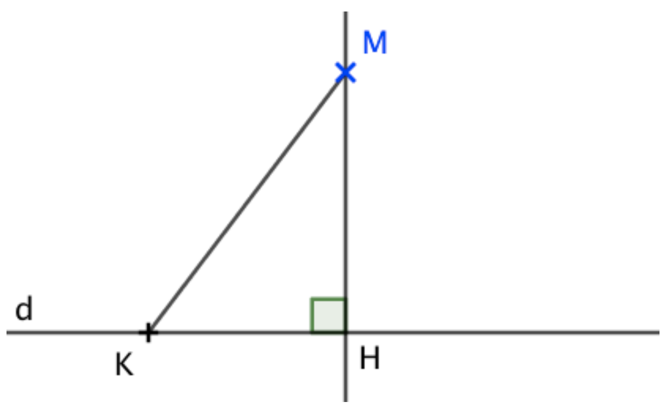


Propriété : Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point de la droite *d* le plus proche du point M.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/DohZ0ehR_rw

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
Supposons qu'il existe un point K de la droite *d* plus proche de M que l'est le point H.

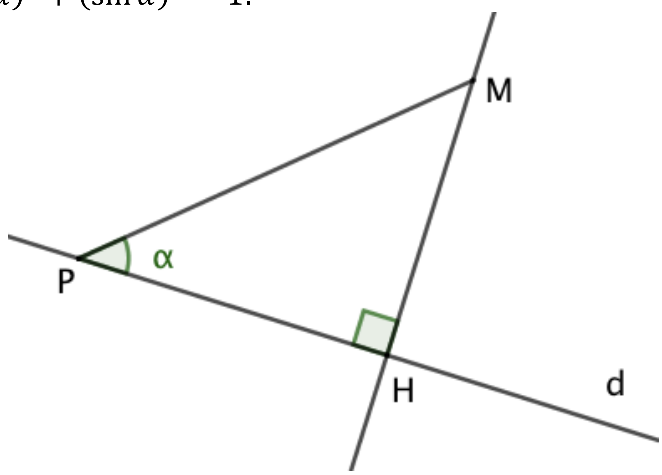


$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.
Donc $KM^2 \leq HM^2$.
Or, d'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$
Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.
Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point de la droite le plus proche du point M.

Méthode : Démontrer (au programme) que $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Vidéo https://youtu.be/9r2qDd7EkMo

Soit une droite *d* et un point P appartenant à *d*.
Soit un point M n'appartenant pas à *d*.
On appelle H le projeté orthogonal du point M sur la droite *d*.
On note α l'angle $\widehat{MPH}$.
Démontrer que $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.



Le triangle PHM est rectangle en H, on a donc : $\cos\alpha = \frac{PH}{PM}$ soit $PH = PM \times \cos\alpha$.
De même, on a : $\sin\alpha = \frac{HM}{PM}$ soit $HM = PM \times \sin\alpha$.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $PH^2 + HM^2 = PM^2$
Soit en remplaçant : $(PM \times \cos\alpha)^2 + (PM \times \sin\alpha)^2 = PM^2$
Soit encore : $PM^2 \times (\cos\alpha)^2 + PM^2 \times (\sin\alpha)^2 = PM^2$
Soit enfin, en simplifiant : $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.