

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ET DROITES

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/sWaHnxqUve0>

Exemple d'introduction :

Soit deux équations à deux inconnues x et y :

$$2x - y = 0 \text{ et } 3x - 4y = -5.$$

Elles forment ce qu'on appelle un **système** de deux équations à deux inconnues.

Et on note :
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$$

Un couple de nombres qui vérifie les deux équations est appelé solution du système.

Ici, le couple (1 ; 2) est solution. En effet :

$$\begin{cases} 2 \times 1 - 2 = 0 \\ 3 \times 1 - 4 \times 2 = -5 \end{cases}$$

Dans ce chapitre, on verra deux méthodes permettant de résoudre de tels systèmes.

Partie 1 : Méthode de substitution

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode de substitution

▶ Vidéo <https://youtu.be/24VsDZK6bN0>

▶ Vidéo <https://youtu.be/tzOCBkFZgUI>

Résoudre le système d'équations par la méthode de substitution :
$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$$

Correction :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

On isole facilement l'inconnue x dans la 2^e équation.

$$\begin{cases} 3(14 + 4y) + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

On remplace x par $14 + 4y$ dans la 1^{re} équation (substitution).

$$\begin{cases} 42 + 12y + 2y = 0 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

On résout la 1^{re} équation pour trouver y .

$$\begin{cases} 14y = -42 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{42}{14} = -3 \\ x = 14 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 14 + 4 \times (-3) \end{cases} \quad \text{On remplace } y \text{ par } -3 \text{ dans la 2}^{\text{e}} \text{ équation.}$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(2 ; -3)$ et on note : $S = \{(2 ; -3)\}$

Partie 2 : Méthode des combinaisons linéaires

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode des combinaisons linéaires

 Vidéo <https://youtu.be/Zw-ql9DFv54>

 Vidéo <https://youtu.be/UPIz65G4f48>

 Vidéo https://youtu.be/V3yn_oEdgxc

Résoudre les systèmes d'équations par la méthode des combinaisons linéaires :

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

Correction

Remarque : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ferait apparaître des fractions. Ce qui complique les calculs.

$$\text{a) } \bullet \begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases} \quad \times 2 \quad \text{On multiplie la 1}^{\text{re}} \text{ équation par 2...}$$

$$\begin{cases} 6x - 4y = 22 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases} \quad \dots \text{ pour obtenir le même coefficient devant une des inconnues.}$$

$$\bullet \quad \begin{array}{r} \{ 6x - 4y = 22 \\ - \{ 6x + 3y = 15 \\ \hline 6x - 6x - 4y - 3y = 22 - 15 \\ -4y - 3y = 22 - 15 \\ -7y = 7 \\ = 7 \\ y = \frac{7}{-7} \\ y = -1 \end{array} \quad \text{On soustrait les deux équations pour éliminer } x.$$

$$\bullet \quad \begin{array}{l} 3x - 2y = 11 \quad \text{On remplace } y \text{ par } -1 \text{ dans une des deux équations (au choix).} \\ 3x - 2 \times (-1) = 11 \\ 3x + 2 = 11 \quad \text{On résout l'équation pour trouver } x. \\ 3x = 11 - 2 \\ 3x = 9 \\ x = 3 \end{array}$$

La solution du système est le couple $(3 ; -1)$ et on note : $S = \{(3 ; -1)\}$

$$\text{b) } \bullet \quad \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 & \times 5 \\ 5x + 3y = -1 & \times 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{On multiplie la 1}^{\text{e}} \text{ équation par 5,} \\ \text{et la 2}^{\text{e}} \text{ équation par 3...} \end{array}$$

$$\begin{cases} 15x - 10y = 35 \\ 15x + 9y = -3 \end{cases} \quad \dots \text{ pour obtenir le même coefficient devant une des inconnues.}$$

$$\bullet \quad \begin{array}{r} \{ 15x - 10y = 35 \\ - \{ 15x + 9y = -3 \\ \hline 15x - 15x - 10y - 9y = 35 + 3 \\ -10y - 9y = 35 + 3 \\ -19y = 38 \\ = 38 \\ y = \frac{38}{-19} \\ y = -2 \end{array} \quad \text{On soustrait les deux équations pour éliminer } x.$$

$$\bullet \quad \begin{array}{l} 3x - 2y = 7 \quad \text{On remplace } y \text{ par } -2 \text{ dans une des deux équations (au choix).} \\ 3x - 2 \times (-2) = 7 \\ 3x + 4 = 7 \\ 3x = 7 - 4 \\ 3x = 3 \\ x = 1 \end{array}$$

La solution du système est le couple $(1 ; -2)$ et on note : $S = \{(1 ; -2)\}$

Partie 3 : Résolutions graphiques

1) Système admettant une unique solution

Méthode : Résoudre graphiquement un système d'équations

 Vidéo https://youtu.be/-LV_5rkWORY

On considère le système d'équations :
$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$$

Déterminer graphiquement le couple solution.

Correction

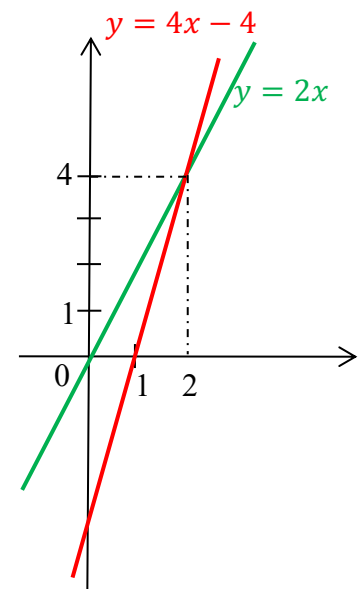
Le système équivaut à :
$$\begin{cases} y = 2x \\ -y = -4x + 4 \\ y = 2x \\ y = 4x - 4 \end{cases}$$

$y = 2x$ et $y = 4x - 4$ sont les équations de deux droites qu'on représente dans un repère.

La solution du système est donc le couple $(x ; y)$ coordonnées du **point d'intersection** des deux droites.

Par lecture graphique, on trouve le couple $(2 ; 4)$ comme solution du système.

On note : $S = \{(2 ; 4)\}$



2) Système n'admettant pas de solution

Méthode : Démontrer qu'un système ne possède pas de solution

 Vidéo <https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk>

On considère le système d'équations :
$$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$$

Démontrer que ce système n'admet pas de solution.

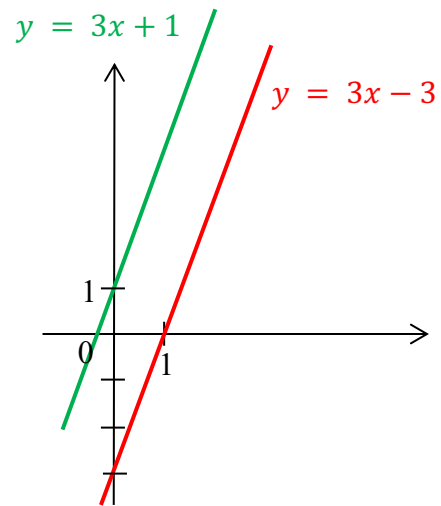
Correction

Le système équivaut à :
$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ -2y = -6x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \frac{-6x}{-2} + \frac{6}{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

Les droites d'équations $y = 3x + 1$ et $y = 3x - 3$ possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc parallèles, et même strictement parallèles. Elles n'ont pas de point d'intersection, donc le système n'a pas de solution. On note : $S = \emptyset$



3) Système admettant une infinité de solutions

Méthode : Démontrer qu'un système admet une infinité de solutions

 Vidéo <https://youtu.be/IYzK0zVr-Lk>

Soit le système d'équations : $\begin{cases} -6x - 3y = -6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Démontrer que ce système admet une infinité de solutions.

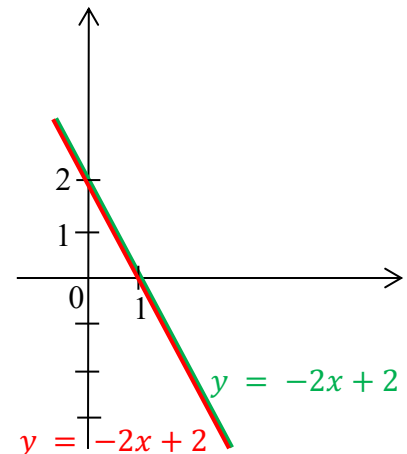
Correction

Le système équivaut à : $\begin{cases} -3y = 6x - 6 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \frac{6}{-3}x - \frac{6}{-3} \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

Les deux droites ont la même équation $y = -2x + 2$, elles sont donc confondues et possèdent une infinité de points d'intersection. Le système admet donc une infinité de solutions : tous les couples $(x; y)$ vérifiant $y = -2x + 2$.



© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr