EQUATIONS, INEQUATIONS

Tout le cours sur les équations en vidéo : https://youtu.be/WoTpA2RyuVU
Tout le cours sur les inéquations en vidéo : https://youtu.be/kbTWwWQ9tYo

I. Résolution d'équations

1. Équation-produit

Définition : Toute équation du type $P(x)$ x $Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques, est appelée **équation-produit**.

Remarque :
Nous rencontrerons plus particulièrement des équations-produits de la forme :
$(ax + b)(cx + d) = 0$.

Propriétés :
- Dire qu'un produit de facteurs est nul, équivaut à dire que l'un au moins des facteurs est nul.
- Le cas particulier de l'équation-produit $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/EFgwA5f6-40
Vidéo https://youtu.be/sMvrUMUES3s

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
1) $(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$ 2) $5x^2 - 4x = 0$

1) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :

$(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$
$(3x + 1)[(1 - 6x) - (3x + 7)] = 0$
$(3x + 1)(1 - 6x - 3x - 7) = 0$
$(3x + 1)(-9x - 6) = 0$
Soit : $3x + 1 = 0$ ou $-9x - 6 = 0$
$3x = -1$ ou $-9x = 6$

$x = -\frac{1}{3}$ ou $x = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$

Les solutions sont donc $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

2) $5x^2 - 4x = 0$

$x(5x - 4) = 0$

Soit : $x = 0$ ou $5x - 4 = 0$

$5x = 4$

$x = \frac{4}{5}$

Les solutions sont donc 0 et $\frac{4}{5}$.

2. Équation de la forme $x^2 = a$

Propriété :

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a.

Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.

Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.

Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$

Soit $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$

$x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

$x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^2 = 16$, $x^2 = -8$ et $(x + 2)^2 = 9$.

- L'équation $x^2 = 16$.
  16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.

- L'équation $x^2 = -8$.
  –8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

- L'équation $(x+2)^2 = 9$.
  On a alors $x+2=3$ ou $x+2=-3$.
  L'équation admet deux solutions $x = 3-2 = 1$ et $x = -3-2 = -5$.

3. Équation-quotient

Définition : Toute équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée **équation-quotient**.

Propriété : Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation-quotient $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $P(x) = 0$.

Exemple :
L'équation « $\frac{x+2}{x+3}$ = 0 » a pour solution x = –2.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-quotient

Vidéo https://youtu.be/zhY1HD4oLHg
Vidéo https://youtu.be/OtGN4HHwEek

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1}$ = 0 b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}$ = 0 c) $\frac{x^2-9}{x+3}$ = 0 d) $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

a) L'équation n'est pas définie pour x = 1.
Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1}$ = 0 équivaut à : $3x + 5 = 0$.
D'où $x = -\frac{5}{3}$.

b) L'équation n'est pas définie pour x = 4.
Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}$ = 0 équivaut à : $(2x+1)(x-3) = 0$.
Soit : $2x+1 = 0$ ou $x - 3 = 0$.
Les solutions sont : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$.

c) L'équation n'est pas définie pour x = –3.

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3}$ = 0 équivaut à : $x^2 - 9 = 0$, soit $x^2 = 9$
Soit encore : x = 3 ou x = –3.
Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : x = 3.

d) L'équation n'est pas définie pour x = 2 et x = 3.
Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ équivaut à : $1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

$$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)} = 0$$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$ et $(x-3)(2-x) \neq 0$
D'où $x = \frac{3}{2}$.

II. Tableaux de signes

1) Exemple d'introduction

a) Compléter le tableau de valeurs de l'expression $2x - 10$:

x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$								

b) Compléter alors la 2e ligne du tableau de signes de l'expression $2x - 10$:

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$2x - 10$		…	0	…	

c) Pour quelle valeur x, l'expression $2x - 10$ s'annule-t-elle ?
Compléter alors la 1ère ligne du tableau de signes.

d) Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique.

a)

x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x-10$	-30	-20	-10	-8	2	4	10	190

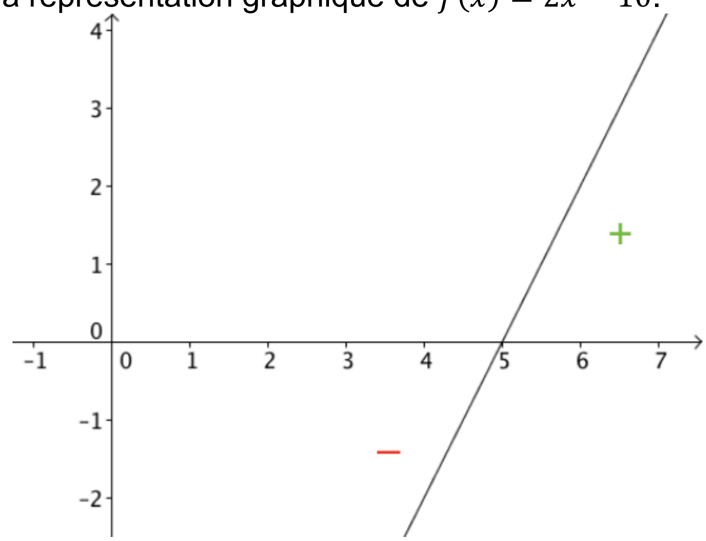
b)

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$2x-10$		$-$	0	$+$	

c) $2x - 10 = 0$ soit $2x = 10$ soit encore $x = 5$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$2x-10$		$-$	0	$+$	

d) On trace la représentation graphique de $f(x) = 2x - 10$.



2) <u>Généralisation</u>

On considère a et b deux nombres fixés ($a \neq 0$) et x est un nombre réel.
Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Déterminons l'abscisse x du point d'intersection de la droite représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses :

Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$,

soit : $ax + b = 0$,

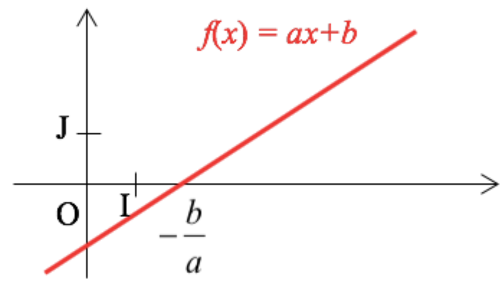
soit : $ax = -b$,

soit encore $x = -\dfrac{b}{a}$.

<u>Si a > 0 :</u>

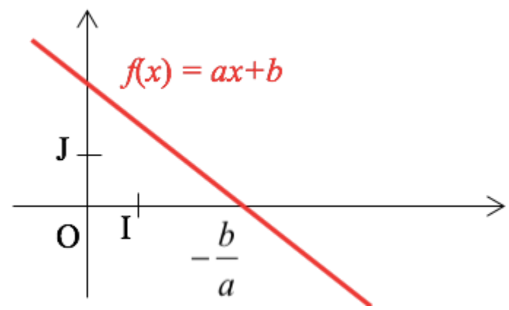
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	



<u>Si a < 0 :</u>
La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$-\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	



<u>Méthode :</u> Déterminer le signe d'une expression du type $ax + b$

Vidéo https://youtu.be/50CByVTP4ig

1) Déterminer le tableau de signes de l'expression $2x + 6$, où x est un nombre réel.
2) Déterminer le tableau de signes de l'expression $-3x + 12$, où x est un nombre réel.

1) Le coefficient en facteur de « x » est positif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$+2x + 6$		$-$	0	$+$	

$2x + 6 = 0$ pour $x = -3$ ⇑

2) Le coefficient en facteur de « x » est négatif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x + 12$		$+$	0	$-$	

$-3x + 12 = 0$ pour $x = 4$ ⇑

III. Résolution d'inéquations

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x.
Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs.

1. Inéquations du premier degré

Méthode : Résoudre une inéquation du premier degré

Vidéo https://youtu.be/ycYfb8aHssY

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur une droite graduée :

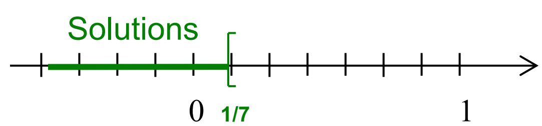
1) $2x + 3 < 4 - 5x$ 2) $2(x - 4) \leq 4x - 5$

1) $2x + 3 < 4 - 5x$

$2x + 5x < 4 - 3$

$7x < 1$

$x < \frac{1}{7}$



Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{7}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{7}\right[$.

2) $2(x - 4) \leq 4x - 5$

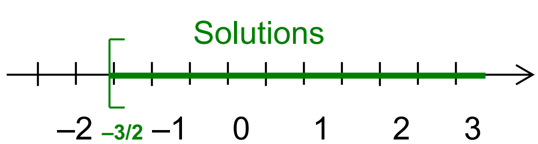
$2x - 8 \leq 4x - 5$

$2x - 4x \leq 8 - 5$

$-2x \leq 3$

$x \geq -\frac{3}{2}$ On divise par un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité.

Les solutions sont tous les nombres supérieurs à $-\frac{3}{2}$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $\left[-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2. En étudiant le signe d'un produit

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Vidéo https://youtu.be/qoNLr9NkvUE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3-6x)(x+2)>0$

Le signe de $(3-6x)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur $3 - 6x$ et $x+2$.

$3 - 6x = 0$ ou $x + 2 = 0$

$6x = 3$ $\quad$ $x = -2$

$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.
En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3-6x)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3 - 6x$		+		+	0	-	
$x + 2$		-	0	+		+	
$(3-6x)(x+2)$		-	0	+	0	-	

On en déduit que $(3-6x)(x+2)>0$ pour $x \in \left]-2\,;\frac{1}{2}\right[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2)>0$ est $\left]-2\,;\frac{1}{2}\right[$.

3. En étudiant le signe d'un quotient

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Vidéo https://youtu.be/Vitm29q8AEs

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

L'équation n'est pas définie pour $3x - 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{3}$.
Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $2-6x$ et $3x-2$.

$2-6x=0$ équivaut à $x=\frac{1}{3}$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		+	0	-		-	
$3x-2$		-		-	0	+	
$\frac{2-6x}{3x-2}$		-	0	+	||	-	

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x=\frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$ pour $x\in\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$ est $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$..