

FONCTION EXPONENTIELLE

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/aD03wqgxek>

Partie 1 : Introduction de la fonction exponentielle

1) Définition

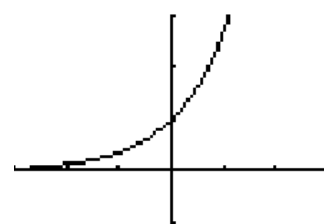
Propriété et définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Conséquence : $\exp(0) = 1$

Avec la calculatrice, il est possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :

Remarque : On verra plus bas que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi $\exp(21)$ dépasse le milliard.

Pour des valeurs de x de plus en plus grandes, la fonction exponentielle prend des valeurs de plus en plus grandes.



Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} .

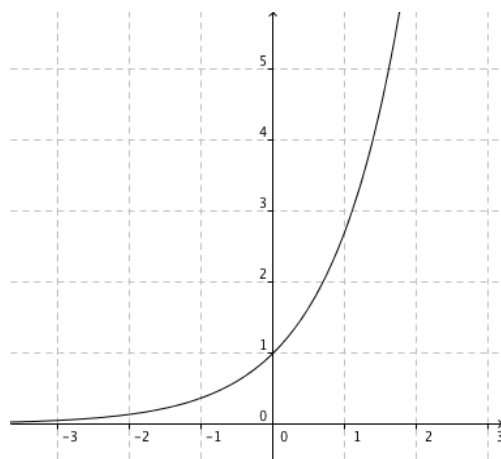
2) Variations et courbe

Par définition de la fonction \exp , on a :

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et $(\exp(x))' = \exp(x)$

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Démonstration : $(\exp(x))' > 0$ car $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$.



3) Propriétés

Théorème : $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement. On l'appelle relation fonctionnelle.

Corollaires :

a) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ ou encore $\exp(x) \exp(-x) = 1$

b) $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

c) $\exp(nx) = (\exp x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration du a et b :

a) $\exp(x) \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$

b) $\exp(x - y) = \exp(x + (-y))$

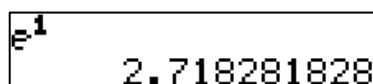
$= \exp(x) \exp(-y) = \exp(x) \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Partie 2 : Le nombre e

1) Le nombre e

Notation : L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e .
On a ainsi $\exp(1) = e$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e .



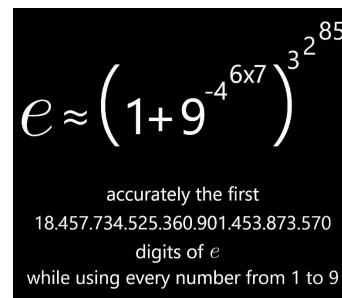
Notation nouvelle :

$\exp(x) = \exp(x \times 1) = (\exp 1)^x = e^x$

Notation : On note pour tout x réel, $\exp x = e^x$

Dans la suite, on utilisera la notation e^x pour désigner la fonction exponentielle.

Divertissement :



$e \approx \left(1 + 9^{-4 \cdot 6x7}\right)^{3^2 \cdot 85}$

accurately the first
18.457.734.525.360.901.453.873.570
digits of e
while using every number from 1 to 9



Comme π , le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses premières décimales sont :

$e \approx 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995$
 $9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274...$

Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit «algébrique».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentielle.

Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Rappelons que par exemple $5!$ se lit "factorielle 5" et est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.

Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.

Nous devons aussi à *Euler* la démonstration de l'irrationalité de e .

2) Propriétés

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriétés :

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

- $e^x > 0$

- $e^{x+y} = e^x e^y$ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $(e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Méthode : Simplifier les écritures

▶ Vidéo https://youtu.be/qDFjeFyA_OY

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$$

$$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$$

$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$$

$$D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$$

Correction

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} & B &= (e^5)^{-6} \times e^{-3} & C &= \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} & D &= \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} \\
 &= \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} & &= e^{5 \times (-6)} \times e^{-3} & &= \frac{1}{e^{-3 \times 2}} + \frac{e^{4 \times (-1)}}{e^{2-6}} & &= \frac{e^{2x \times 3}}{e^{3x+1-x-1}} \\
 &= \frac{e^3}{e^{-5}} & &= e^{-30} \times e^{-3} & &= \frac{1}{e^{-3 \times 2}} + \frac{e^{-4}}{e^{2-6}} & &= \frac{e^{6x}}{e^{2x}} \\
 &= e^{3-(-5)} & &= e^{-30-3} & &= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} & &= e^{6x-2x} \\
 &= e^8 & &= e^{-33} & &= e^6 + 1 & &= e^{4x}
 \end{aligned}$$

3) Équations et inéquations contenant des exponentielles**Propriétés :**

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation contenant des exponentielles▶ Vidéo https://youtu.be/dA73-HT-I_Y▶ Vidéo <https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y>a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.**Correction**

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$e^{x^2-3} = e^{-2x}$

$x^2 - 3 = -2x$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$

Donc $x = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$ ou $x = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$

$S = \{-3; 1\}$.

b) $e^{4x-1} \geq 1$

$e^{4x-1} \geq e^0$

$4x - 1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{4}$

$S = \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[.$

Partie 3 : Étude de la fonction exponentielle

1) Dérivabilité

Propriété : La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et $(e^x)' = e^x$

Méthode : Dériver une fonction exponentielle

 **Vidéo** <https://youtu.be/XcMePHk6llk>

Dériver les fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(x) = 4x - 3e^x \qquad \text{b) } g(x) = (x - 1)e^x \qquad \text{c) } h(x) = \frac{e^x}{x}$$

Correction

$$\text{a) } f'(x) = 4 - 3e^x$$

$$\text{b) } g(x) = (x - 1)e^x = u(x)v(x)$$

$$\text{Avec } u(x) = x - 1 \rightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \rightarrow v'(x) = e^x$$

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ = 1 \times e^x + (x - 1)e^x \\ = e^x + xe^x - e^x \\ = xe^x$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{e^x}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

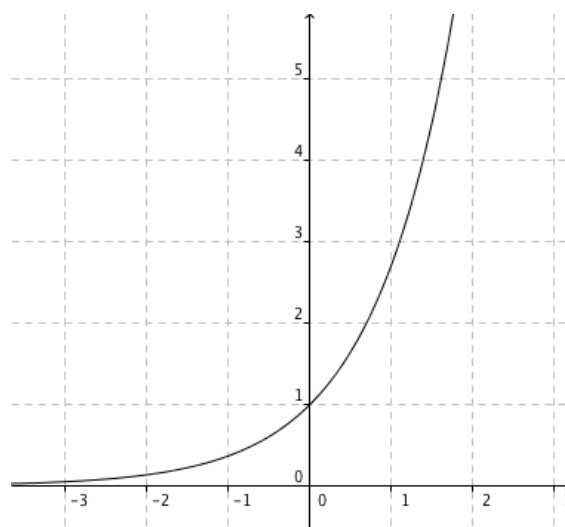
$$\text{Avec : } u(x) = e^x \rightarrow u'(x) = e^x \\ v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$$

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} \\ = \frac{xe^x - e^x}{x^2} \\ = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

2) Variations et courbe de la fonction exponentielle

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
e^x	0	$+\infty$



Méthode : Étudier une fonction exponentielle

▶ Vidéo <https://youtu.be/MA1aW8ldjo>

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x + 1)e^x$.

- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
- Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

Correction

$$a) f(x) = (x + 1)e^x = u(x)v(x)$$

$$\text{Avec } u(x) = x + 1 \rightarrow u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^x \rightarrow v'(x) = e^x$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$= 1 \times e^x + (x + 1)e^x$$

$$= e^x + xe^x + e^x$$

$$= 2e^x + xe^x$$

$$= e^x(2 + x) \quad \leftarrow \text{Factoriser } f'(x) \text{ permet d'étudier son signe à la question b.}$$

b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x + 2$.

On commence par résoudre l'équation $x + 2 = 0$.

Soit : $x = -2$.

La fonction $x \mapsto x + 2$ est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 1 est positif.

Donc la fonction $x \mapsto x + 2$ est croissante. Elle est donc d'abord négative (avant $x = -2$) puis positive (après $x = -2$).

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

$$f(-2) = (-2 + 1)e^{-2} = -e^{-2}.$$

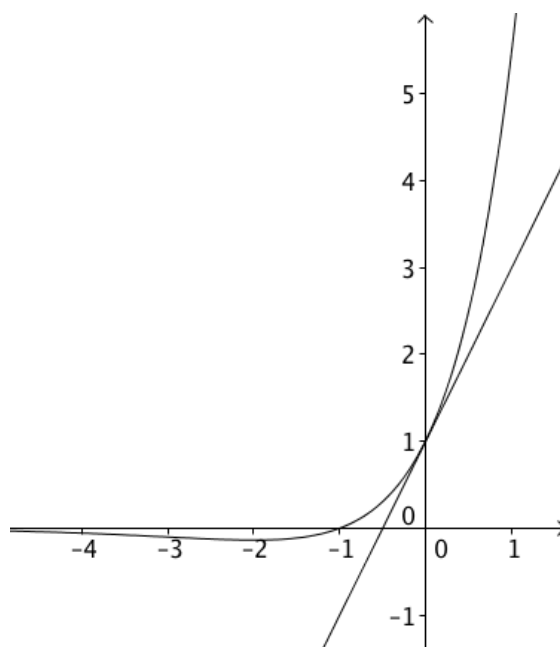
c) $f(0) = (0 + 1)e^0 = 1$

$$f'(0) = (0 + 2)e^0 = 2$$

Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit :

$$y = 2x + 1$$

d)



Partie 4 : Fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

1) Dérivabilité

Propriété :

La fonction f définie par $f(t) = e^{kt}$ est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(t) = ke^{kt}$.

Démonstration :

On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $t \mapsto g(at + b)$ est $t \mapsto ag'(at + b)$.

En considérant $g(t) = e^t$, $a = k$ et $b = 0$, on a : $(e^{kt})' = ke^{kt}$.

Méthode : Dériver une fonction du type $t \mapsto e^{kt}$

 Vidéo <https://youtu.be/RlyFEcx5Y3E>

Dériver les fonctions suivantes :

$$a) f(t) = 5e^{-3t} \quad b) g(t) = te^{-t} \quad c) h(t) = \frac{4}{e^t}$$

Correction

$$a) f'(t) = 5 \times (-3)e^{-3t} = -15e^{-3t}$$

$$b) g(t) = te^{-t} = u(t)v(t)$$

$$\text{Avec : } u(t) = t \rightarrow u'(t) = 1$$

$$v(t) = e^{-t} \rightarrow v'(t) = -e^{-t}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ &= 1 \times e^{-t} + t(-e^{-t}) \\ &= e^{-t} - te^{-t} \end{aligned}$$

$$c) h(t) = \frac{4}{e^t} = 4e^{-t}$$

$$h'(t) = 4 \times (-1)e^{-t} = -4e^{-t}$$

2) Variations et courbe

Propriété :

Si $k > 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement croissante.

Si $k < 0$: la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.

Démonstration :

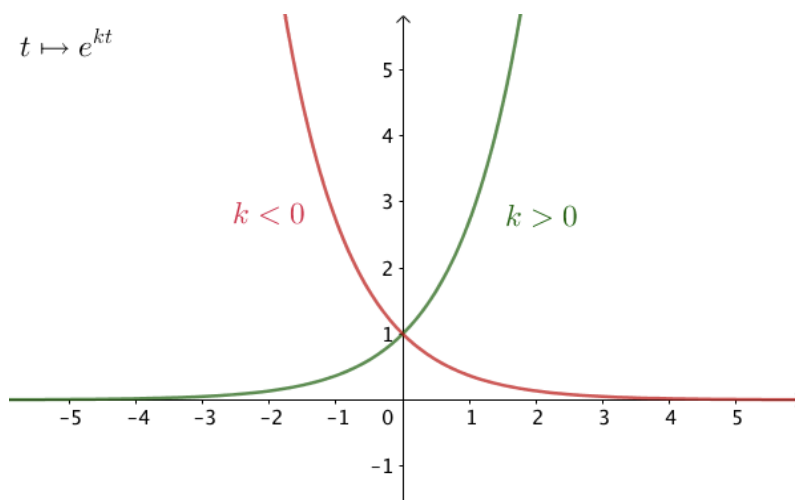
$$\text{On a : } (e^{kt})' = ke^{kt}$$

Or, $e^{kt} > 0$ pour tout réel t et tout entier relatif k non nul.

Donc le signe de la dérivée $t \mapsto ke^{kt}$ dépend du signe de k .

Si $k > 0$ alors la dérivée est strictement positive est donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement croissante.

Si $k < 0$ alors la dérivée est strictement négative est donc la fonction $t \mapsto e^{kt}$ est strictement décroissante.



Méthode : Étudier une fonction $t \mapsto e^{kt}$ dans une situation concrète

Vidéo <https://youtu.be/lsLQwiB9Nrg>

Par suite d'une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ et telle que $f'(t) = 0,14f(t)$.

- 1) Montrer que la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.
- 2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A .
- 3) Déterminer les variations de f sur $[0 ; 10]$.
- 4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

Correction

$$1) f'(t) = A \times 0,14e^{0,14t} = 0,14 \times Ae^{0,14t} = 0,14f(t).$$

La fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ vérifient bien l'égalité $f'(t) = 0,14f(t)$ donc elle convient.

$$2) f(0) = Ae^{0,14 \times 0} = Ae^0 = A.$$

Donc, si $f(0) = 50000$, on a : $A = 50000$.

Une expression de la fonction f est donc : $f(t) = 50000e^{0,14t}$.

3) Comme $k = 0,14 > 0$, on en déduit que la fonction $x \mapsto e^{0,14x}$ est strictement croissante sur $[0 ; 10]$. Il en est de même pour la fonction f .

$$4) a) f(3) = 50\,000 e^{0,14 \times 3} = 50\,000 e^{0,42} \approx 76\,000$$

$$f(5,5) = 50\,000 e^{0,14 \times 5,5} = 50\,000 e^{0,77} \approx 108\,000$$

Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.

Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.

b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y ₁
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547

Partie 5 : Exponentielle et suite géométrique

Propriété : Pour tout réel a , on a : $e^{na} = (e^a)^n$
 La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a .

Méthode : Déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle

 Vidéo <https://youtu.be/hKh-ry9AA00>

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

a) $u_n = e^{4n}$ b) $u_n = 2e^{-3n}$ c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}}$ d) $u_n = e^{2n-1}$

2) a) Déterminer une expression en fonction de n de la suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3.

b) Donner les variations de cette suite.

Correction

On rappelle qu'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 a pour terme général : $u_n = u_0 q^n$.

1) a) $u_n = e^{4n} = 1(e^4)^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison e^4 et de premier terme 1.

b) $u_n = 2e^{-3n} = 2(e^{-3})^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison e^{-3} et de premier terme 2.

c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}} = (-1)\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^n$

(u_n) est une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{3}}$ et de premier terme -1 .

$$d) u_n = e^{2n-1} = e^{2n} e^{-1} = e^{-1} (e^2)^n = \frac{1}{e} (e^2)^n$$

(u_n) est une suite géométrique de raison e^2 et de premier terme $\frac{1}{e}$.

2) a) (u_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3, donc :

$$u_n = 3 \left(\frac{1}{e}\right)^n = 3(e^{-1})^n = 3e^{-n}.$$

b) La raison de la suite est telle que $0 < \frac{1}{e} < 1$, donc la suite est décroissante.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales