

NOTION DE FONCTION

▶ Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/E4SY8_L-DTA

Partie 1 : Vocabulaire et notations

▶ Vidéo <https://youtu.be/iyagHXIjp-4>

Exemple d'introduction :

Dans un théâtre, l'achat d'un abonnement à 20 € permet d'avoir un tarif réduit sur les places de spectacle et de la payer 12 €.

Prix du spectacle pour :

$$2 \text{ places : } 20 + 2 \times 12 = 44 \text{ €}$$

$$4 \text{ places : } 20 + 4 \times 12 = 68 \text{ €}$$

$$10 \text{ places : } 20 + 10 \times 12 = 140 \text{ €}$$

$$x \text{ places : } 20 + x \times 12 = 20 + 12x \text{ €}$$

Pour un nombre de places donné, on fait correspondre le prix à payer.

$$\text{Par exemple : } 2 \mapsto 44$$

$$10 \mapsto 140$$

De façon générale, pour x places, on note : $x \mapsto 20 + 12x$

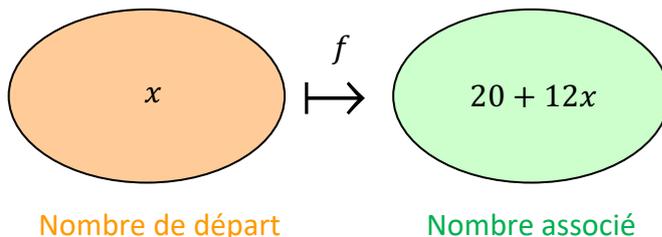
$x \mapsto 20 + 12x$ se lit « à x , on associe $20 + 12x$ ».

La correspondance qu'on a établie entre x et $20 + 12x$ peut porter un nom.

On va l'appeler f , et on note :

$$f: x \mapsto 20 + 12x$$

f est appelée une **fonction**. C'est une « machine » mathématique qui, à un nombre donné, fait correspondre un autre nombre.



x est appelée la **variable**.

On note également :

$$f(x) = 20 + 12x$$

$f(x)$ se lit « f de x ».

$f: 10 \mapsto 144$ peut donc s'écrire : $f(10) = 144$

On peut résumer les résultats précédents dans un tableau qui s'appelle **tableau de valeurs**.

x	2	4	10
$f(x)$	44	68	140

Méthode : Résoudre un problème à l'aide d'une fonction

 Vidéo youtu.be/02mDFbESlBk

On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre
- Enlever 2
- Multiplier par 2
- Ajouter 3

1) Appliquer le programme en prenant 4 comme nombre de départ.

2) On prend x comme nombre de départ.

Donner le résultat du programme en fonction de x .

3) On appelle f la fonction qui associe à x le résultat du programme.

Donner l'expression de la fonction f à l'aide des deux notations suivantes :

$$f: x \mapsto \dots$$

$$f(x) = \dots$$

4) Compléter le tableau de valeurs :

x	4	6	10
$f(x)$			

Correction

1) En prenant 4 au départ :

- 4
- $4 - 2 = 2$
- $2 \times 2 = 4$
- $4 + 3 = 7$

En prenant 4 au départ, on obtient 7.

2) En prenant x au départ :

- x
- $x - 2$
- $2 \times (x - 2)$
- $2 \times (x - 2) + 3$

En prenant x au départ, on obtient $2(x - 2) + 3$.

On peut simplifier l'expression :

$$\begin{aligned} 2(x - 2) + 3 &= 2 \times x + 2 \times (-2) + 3 \\ &= 2x - 4 + 3 \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

3) $f(x) = 2x - 1$

$$f: x \mapsto 2x - 1$$

4)

x	4	6	10
$f(x)$	7	11	19

$$\begin{aligned} & 2 \times 4 - 1 \\ & = 8 - 1 \\ & = 7 \end{aligned}$$

Partie 2 : Image, antécédent

Exemple :

Dire que : $f(2) = 5$ signifie que :



On dit que :

- l'**image** de 2 par la fonction f est 5.
- un **antécédent** de 5 par f est 2.

Méthode : Déterminer une image et un antécédent par une fonction

📺 Vidéo <https://youtu.be/EOS5bSPTZjg>

Soit le tableau de valeurs suivant de la fonction f :

x	-4	6	10	18	20
$f(x)$	18	20	-4	38	18

Compléter alors :

- a) L'image de -4 par f est ...
- b) $f : \dots \mapsto -4$
- c) $f(20) = \dots$
- d) Un antécédent de 18 par f est ...

Correction

- a) L'image de -4 par f est 18, car $-4 \mapsto 18$.
- b) $f : 10 \mapsto -4$
- c) $f(20) = 18$
- d) Un antécédent de 18 par f est -4 ou 20, car $f(-4) = 18$ et $f(20) = 18$.

Remarques :

- Un nombre peut posséder **plusieurs antécédents**.
- Par exemple : Ici, des antécédents de 18 sont -4 et 20.
- Cependant, un nombre possède une **unique image**.

Méthode : Déterminer l'image d'une fonction par calcul

 Vidéo https://youtu.be/8j_4DHWnRJU

Soit la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 2$.
Calculer l'image de 6 par la fonction g .

Correction

$$g(x) = x^2 - 2$$

$$g(6) = 6^2 - 2$$

$$g(6) = 36 - 2$$

$$g(6) = 34$$

L'image de 6 par la fonction g est 34.

Méthode : Déterminer un antécédent par calcul

 Vidéo <https://youtu.be/X0oOBo65YpE>

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.
Déterminer un antécédent de -5 par la fonction f .

Correction

On cherche un antécédent de -5 donc -5 est une image.

On peut donc écrire : $f(x) = -5$

$$\text{Soit : } 2x - 3 = -5$$

On résout ainsi l'équation :

$$2x = 3 - 5$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

L'antécédent de -5 par f est donc -1 .

Partie 3 : Représentation graphique d'une fonction1. Construction d'une courbe**Méthode :** Représenter graphiquement une fonction

 Vidéo <https://youtu.be/xHJNdrhzY4Q>

Soit la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.
On donne un tableau de valeurs de la fonction f :

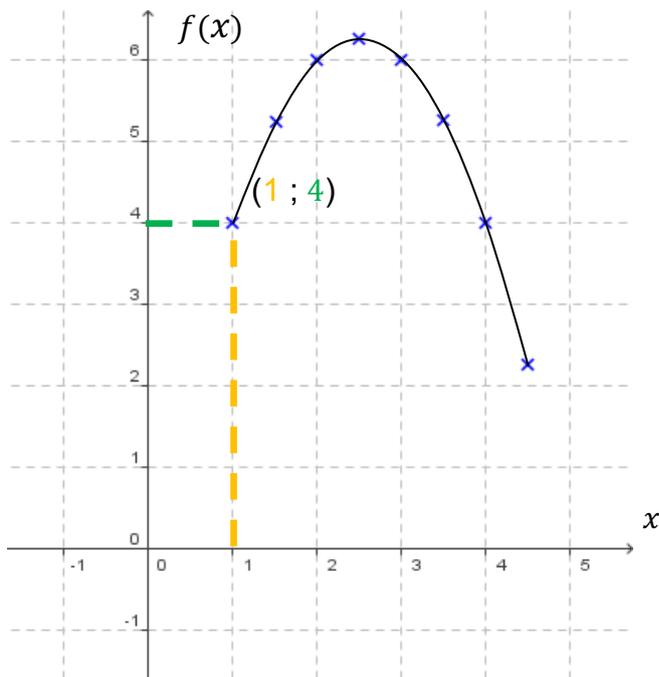
x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	4	5,25	6	6,25	6	5,25	4	2,25

Tracer, dans un repère, la courbe représentative de la fonction f .

Correction

On représente les données du tableau de valeurs dans un repère tel qu'on trouve en abscisse les valeurs de x et en ordonnée les valeurs de $f(x)$ correspondantes.

En reliant les points, on obtient une courbe. Tout point de la courbe possède donc des coordonnées de la forme $(x ; f(x))$.

**Remarque :**

Les images $f(x)$ se lisent sur l'axe des ordonnées (y) donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$ peut se noter $y = 5x - x^2$.

De façon générale, l'équation d'une courbe d'une fonction f se note $y = f(x)$.



En latin, « curbus » désignait ce qui est courbé. On retrouve le mot en ancien français sous la forme de « corbe ». Le corbeau est ainsi appelé à cause de la forme de son bec.

Comprendre les notations sur les fonctions :

 Vidéo <https://youtu.be/iyagHXiJp-4>

Méthode : Vérifier si un point appartient à la courbe d'une fonction

 Vidéo

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3$

Vérifier que le point de coordonnées $(-2 ; 7)$ appartient à la courbe de f .

Correction

Le point de coordonnées $(-2 ; 7)$ appartient à la courbe si $f(-2) = 7$.

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

Donc le point de coordonnées $(-2 ; 7)$ appartient à la courbe de f .

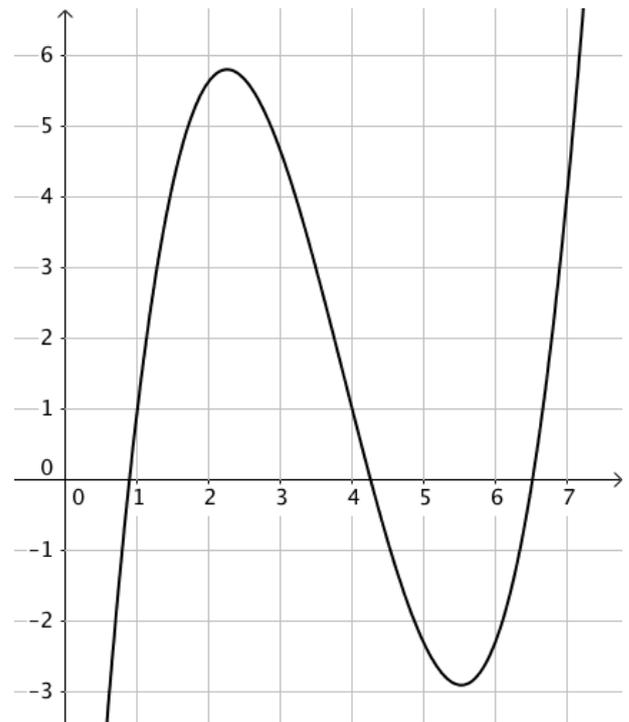
2. Lecture graphique d'une image et d'un antécédentMéthode : Lire graphiquement une image et un antécédent

 Vidéo <https://youtu.be/8cytzglu8yc>

On considère la fonction f représentée ci-contre.

Déterminer graphiquement :

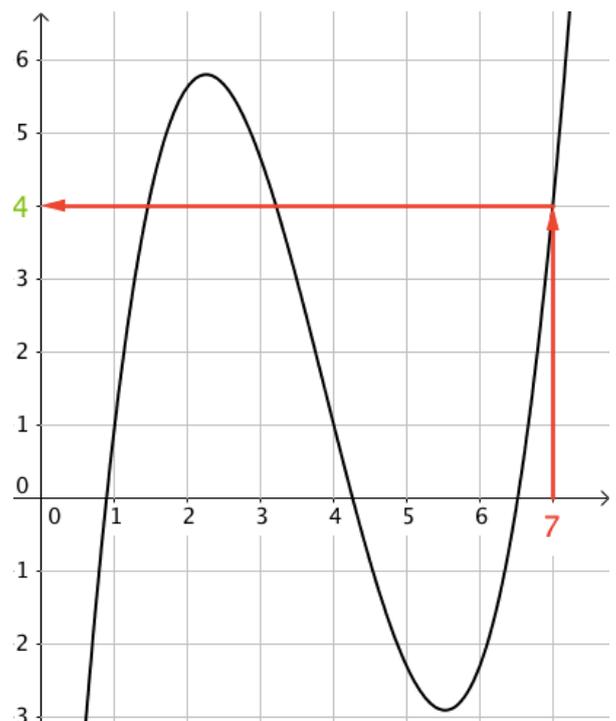
- L'image de 7 par la fonction f .
- Trois antécédents de 1 par la fonction f .

**Correction**

a) Pour déterminer l'image de 7, on « part » de l'abscisse 7, on « rejoint » la courbe et on lit la valeur correspondante sur l'axe des ordonnées.

On lit donc que l'image de 7 est 4.

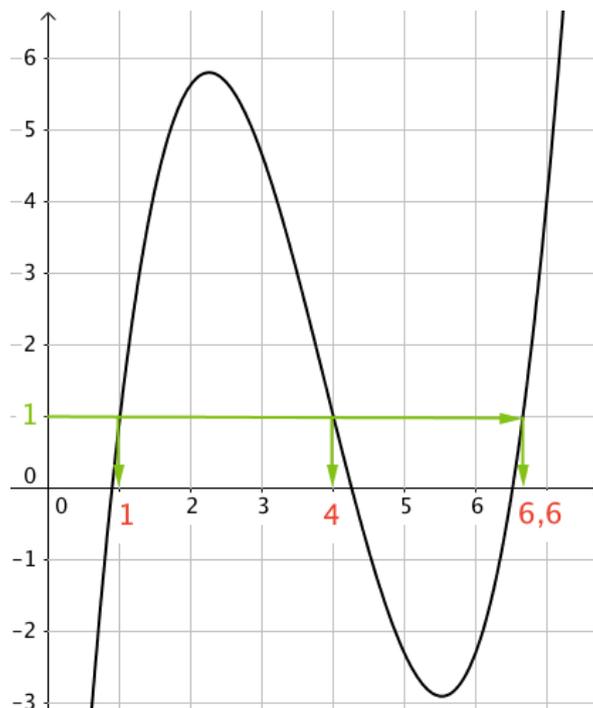
On peut noter : $f(7) = 4$.



b) Pour déterminer des antécédents de 1, on « part » de l'ordonnée 1, on « rejoint » la courbe et on lit les valeurs correspondantes sur l'axe des abscisses.

On lit donc que des antécédents de 1 sont 1, 4 et 6,6.

On peut par exemple noter : $f(4) = 1$.

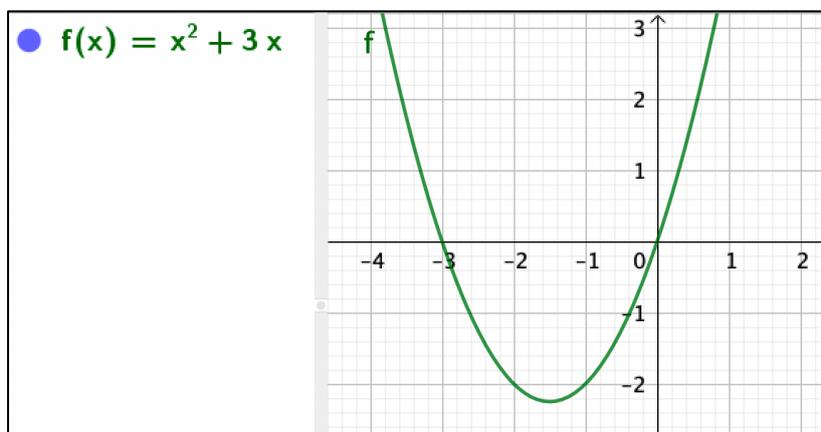


3. Tableau de signes

 Vidéo <https://youtu.be/AZvjA44WfPw>

Ouvrir le logiciel [GeoGebra](https://www.geogebra.org/) et saisir directement l'expression de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x$.

Dans la barre de saisie, on écrira : $f(x)=x^2+3x$



On constate que la fonction f s'annule en -3 et en 0 .

Elle est positive avant -3 et après 0 . Elle est négative entre -3 et 0 .

On peut ainsi dresser le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

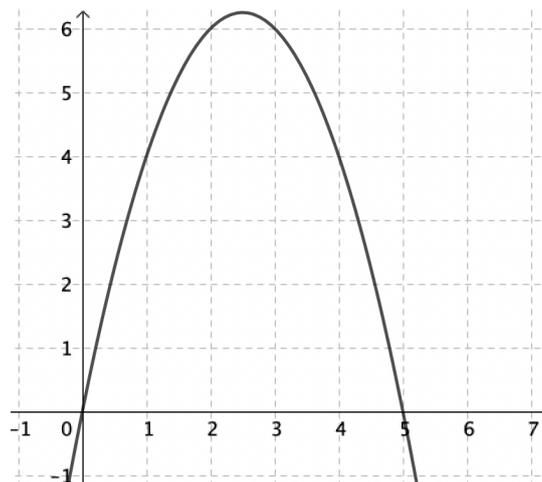
Partie 4 : Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Méthode : Résoudre graphiquement une équation

📺 Vidéo <https://youtu.be/FCUd2muFEyI>

On a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.

Résoudre graphiquement l'équation $5x - x^2 = 4$.



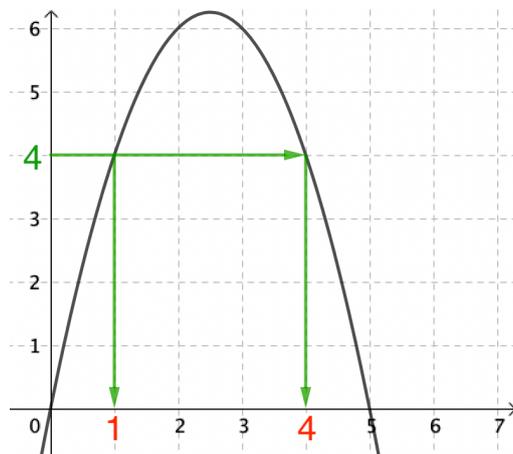
Correction

L'équation $5x - x^2 = 4$ peut s'écrire $f(x) = 4$.

Ce qui revient à trouver les antécédents de 4 par la fonction f .

On « part » de l'ordonnée 4, on « rejoint » la courbe et on lit les solutions sur l'axe des abscisses : $x = 1$ ou $x = 4$.

On peut noter : $S = \{1 ; 4\}$.



Remarques :

- Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
- L'équation $f(x) = 7$, par exemple, ne semble pas avoir de solution car la courbe représentée ne possède pas de point d'ordonnée 7.
- Graphiquement, on ne peut pas être certain que les solutions qui apparaissent sont les seules. Il pourrait y en avoir d'autres au-delà des limites de la représentation graphique tracée.

Méthode : Résoudre graphiquement une inéquation

📺 Vidéo https://youtu.be/3_6LcpumUh4

Dans la méthode précédente, on a représenté la courbe de la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.

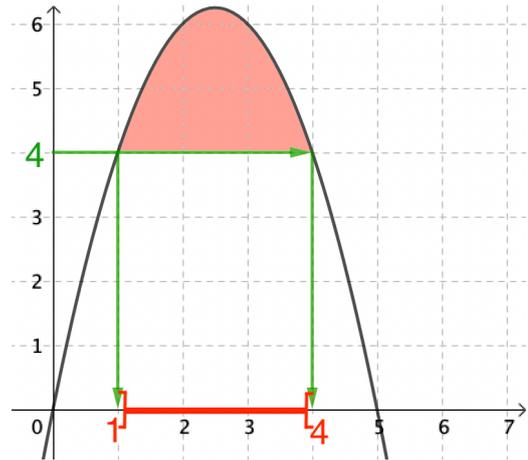
Résoudre graphiquement l'inéquation $5x - x^2 > 4$.

Correction

L'inéquation $5x - x^2 > 4$ peut s'écrire $f(x) > 4$.
 Ce qui revient à déterminer les points de la courbe dont l'ordonnée est strictement supérieure à 4.
 On lit les solutions correspondantes sur l'axe des abscisses :

x est strictement compris entre 1 et 4.

On peut noter : $S =]1 ; 4[$.



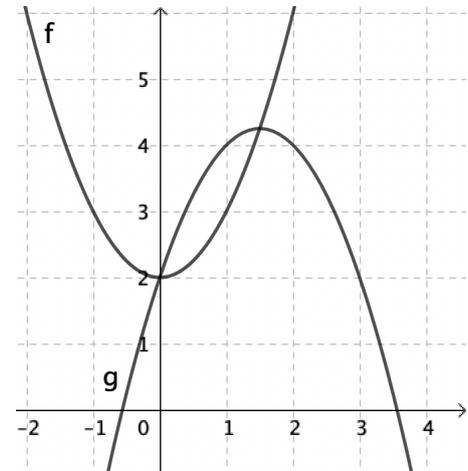
Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du type :
 $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$

Vidéo <https://youtu.be/nwdv78G1klI>

On a représenté les courbes des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + 2 \text{ et } g(x) = -x^2 + 3x + 2.$$

- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

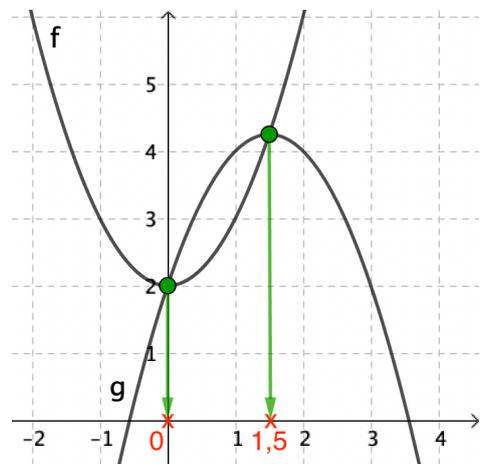
**Correction**

a) $f(x) = g(x)$ lorsque **les courbes se coupent**.

Il suffit de lire l'**abscisse** des points d'intersection des deux courbes.

On lit les solutions sur l'axe des abscisses : **0** et **1,5**.

On peut noter : $S = \{0 ; 1,5\}$.

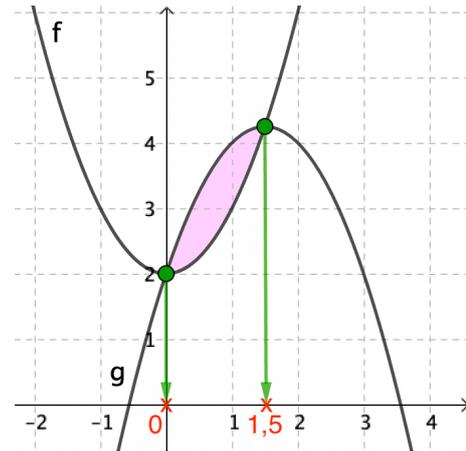


b) $f(x) < g(x)$ lorsque la courbe de g se trouve au-dessus de la courbe de f .

On lit l'ensemble des solutions sur l'axe des abscisses : l'intervalle $]0 ; 1,5[$.

On peut noter : $S =]0 ; 1,5[$.

Les valeurs 0 et 1,5 sont exclues de l'ensemble des solutions car dans l'inéquation $f(x) < g(x)$ l'inégalité est stricte.



ALGORITHME

TP avec Python : Calcul de la longueur approchée d'une portion de courbe représentative d'une fonction

https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_LongCourbe.pdf

```

L ← 0
p ← 3/N
x1 ← 0
x2 ← x1 + p
Pour i allant de 1 à N
    y1 ← 1/(x1 + 1)
    y2 ← 1/(x2 + 1)
    L ← L + ...
    x1 ← x1 + p
    x2 ← x2 + p
Fin Pour
Afficher L
  
```



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales