# VARIATIONS D’UNE FONCTION

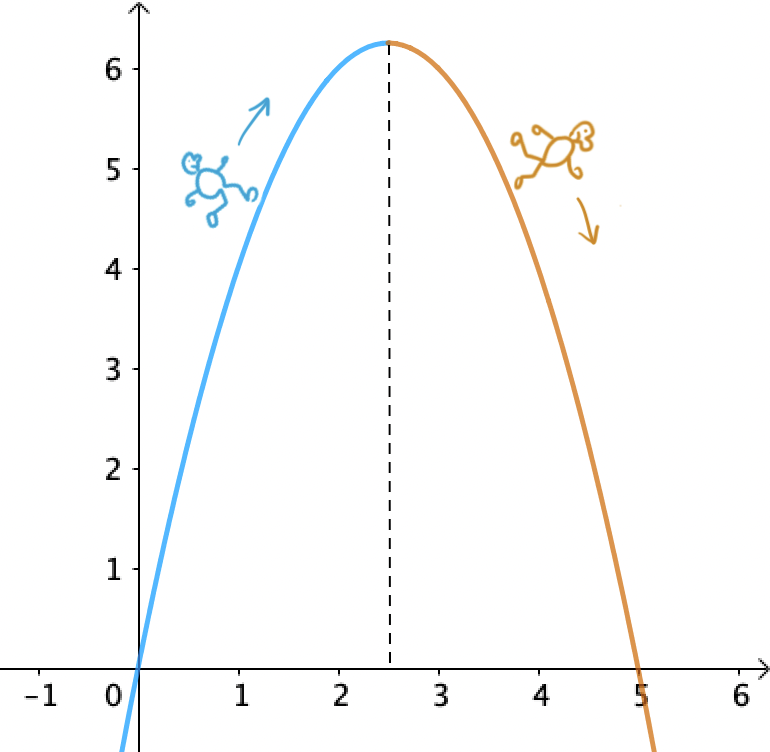
 **Tout le cours sur les variations en vidéo :** [**https://youtu.be/i8aYSIidNlk**](https://youtu.be/i8aYSIidNlk)

 **Tout le cours sur les fonctions affines en vidéo :** [**https://youtu.be/n5\_pRx4ozIg**](https://youtu.be/n5_pRx4ozIg)

## Partie 1 : Fonctions croissantes et fonctions décroissantes

* 1. Définitions

On a représenté ci-dessous dans un repère la fonction définie par .

Lorsqu’on se promène sur la courbe en allant de la gauche vers la droite :

Sur l’intervalle , on **descend**, on dit que la fonction est **décroissante**.

Sur l’intervalle , on **monte**, on dit que la fonction est **croissante**.

est décroissante sur :

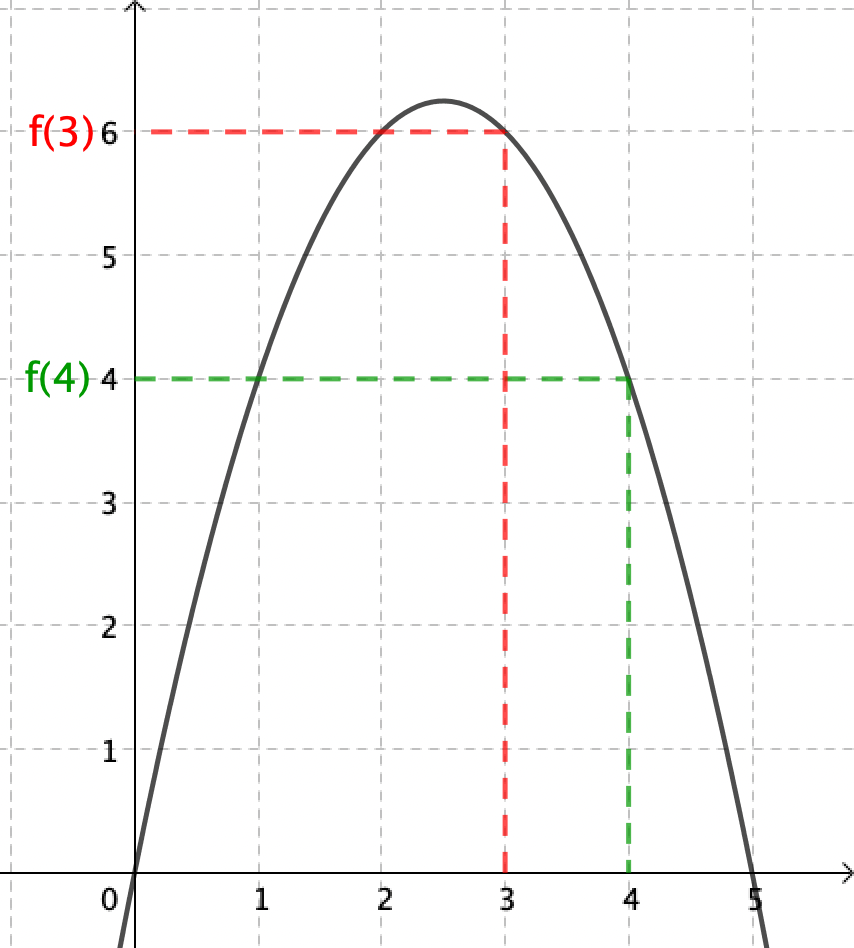
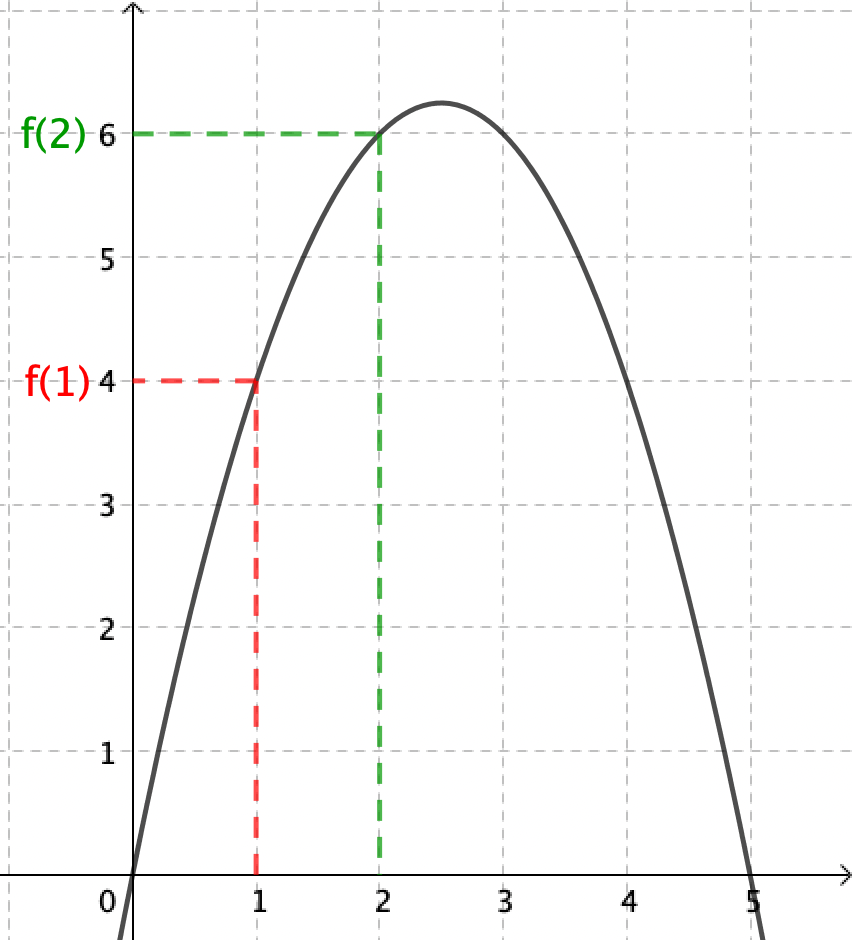
Si augmente (),

alors diminue ().

est croissante sur :

Si augmente (),

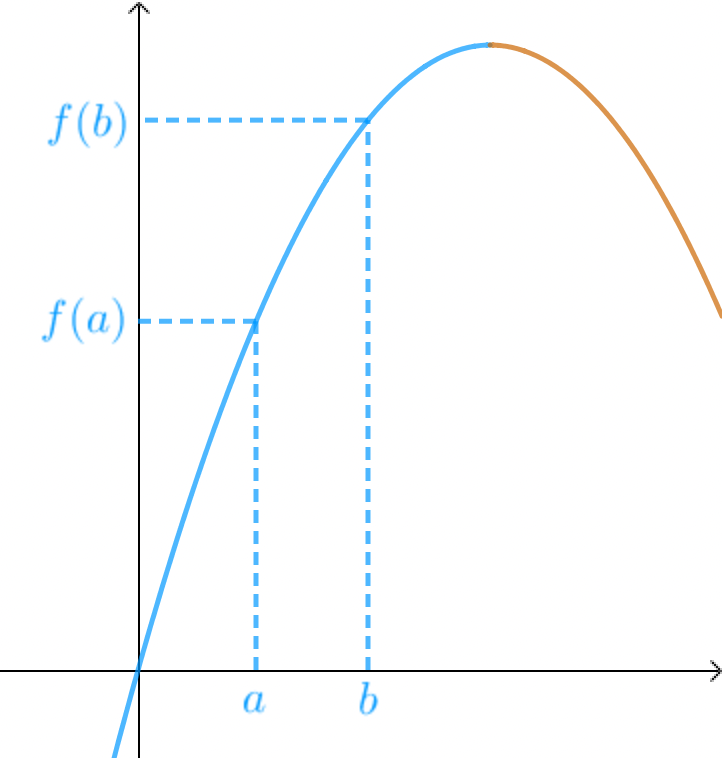
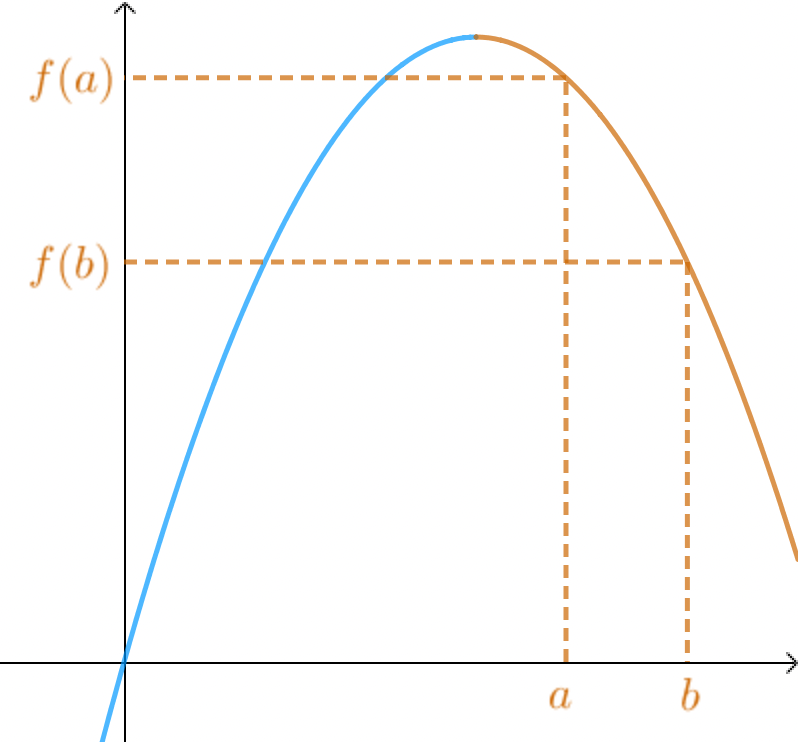
alors augmente ().



Définitions : Sur un intervalle ,

- une fonction est**croissante**, - une fonction est**décroissante**,

si alors . si alors .

Remarques :

* Pour une fonction **constante** : on a toujours .
* Dire queest **monotone** signifie que est soit croissante, soit décroissante.
* On dit qu’une fonction croissante conserve l’ordre et qu’une fonction décroissante renverse l’ordre.

Exercice : Déterminer les variations d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zHYaPOWi4Iw**](https://youtu.be/zHYaPOWi4Iw)

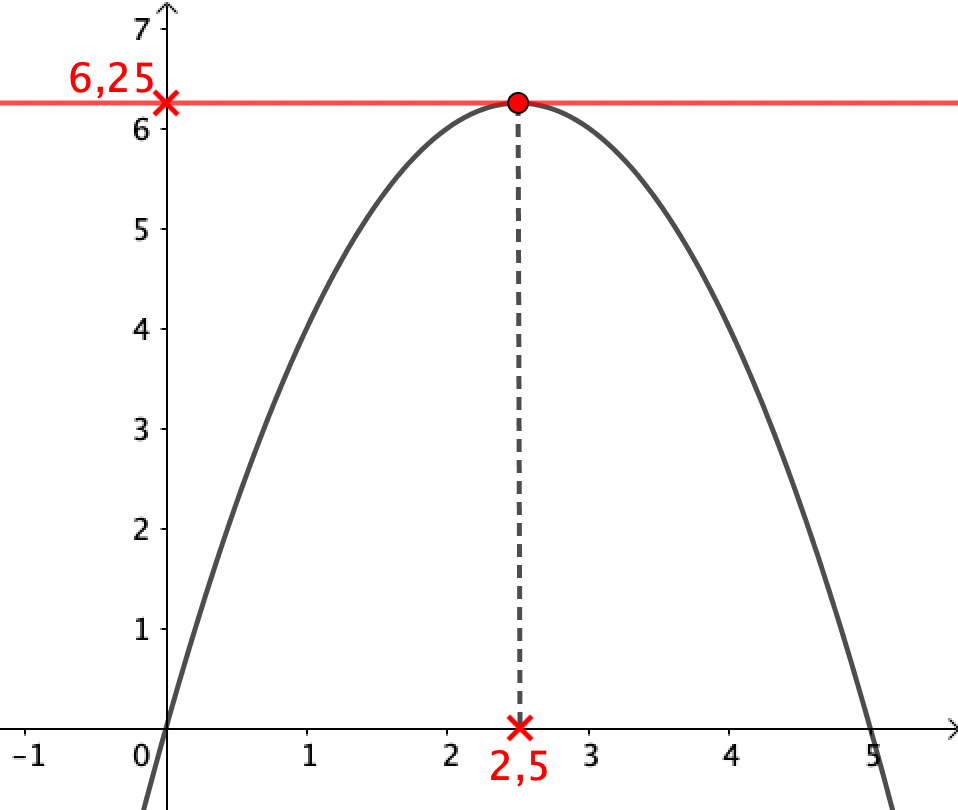
 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_\_KaMRG51Ts**](https://youtu.be/__KaMRG51Ts)

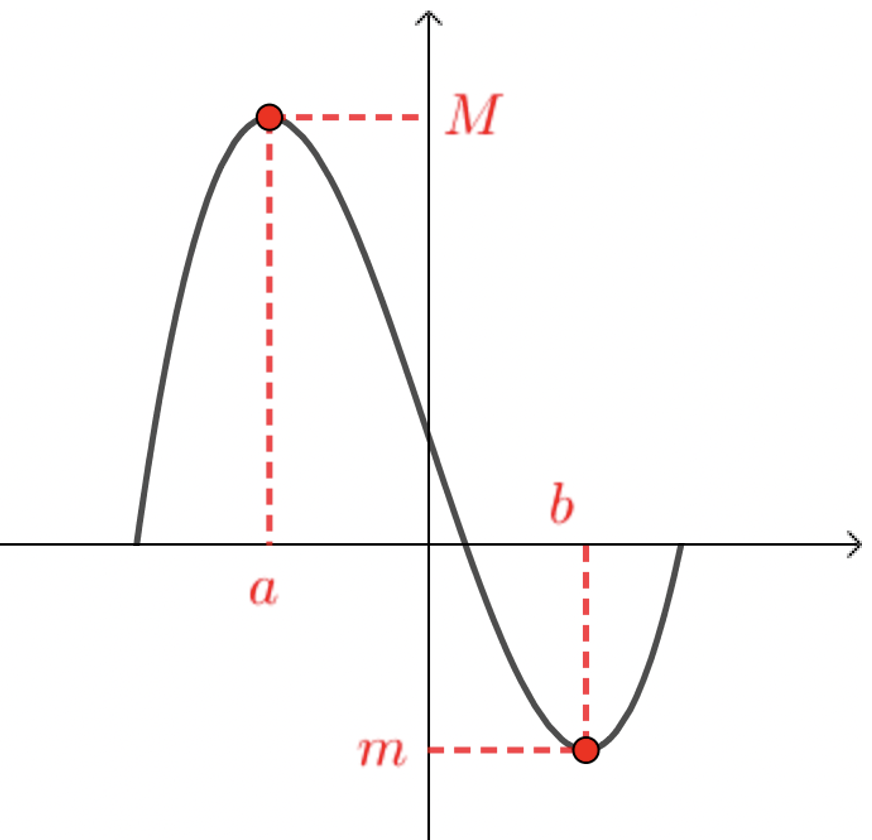
* 1. Maximum et minimum

Exemple : On reprend la fonction définie dans l’exemple de la partie 1.

Sur l’intervalle , on a : .

On dit que est le maximum de la fonction . Ce maximum est atteint en .



Définitions : Sur un intervalle ,

- une fonction admet un **maximum** en ,

si pour tout , .

- une fonction admet un **minimum** en ,

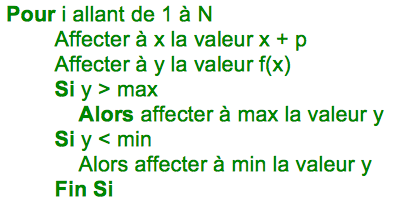
si pour tout .

Remarque : Un minimum ou un maximum s’appelle un **extremum**.

TP avec Python :

Approcher un extremum par la méthode du balayage

[*https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo\_Extrem.pdf*](https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_Extrem.pdf)



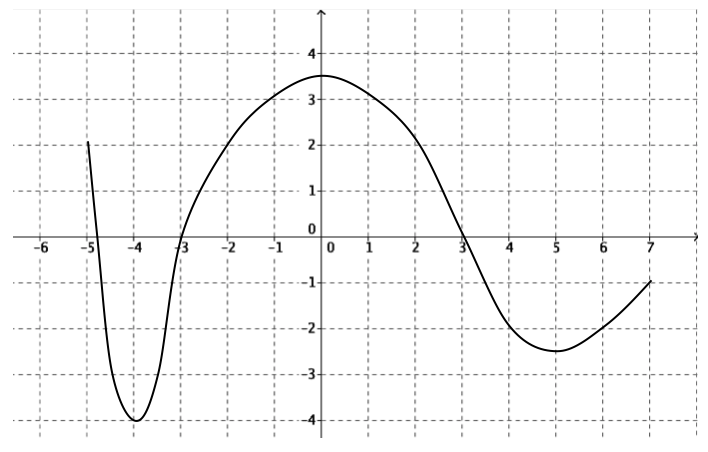
* 1. Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.

Méthode : Déterminer graphiquement les variations d’une fonction et dresser le tableau de variations

 **Vidéo** [**https://youtu.be/yGqqoBMq8Fw**](https://youtu.be/yGqqoBMq8Fw)

On considère la représentation graphique la fonction :



a) Sur quel intervalle la fonction est-elle définie ?

b) Donner les variations de la fonction.

c) Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.

d) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

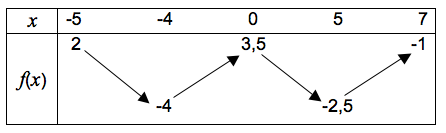
**Correction**

a) La fonction est définie sur .

b) La fonction est croissante sur les intervalles et . Elle est décroissante sur les intervalles et .

c) Le maximum de est . Il est atteint en .

Le minimum de est . Il est atteint en .

d)

## Partie 2 : Cas des fonctions affines

### Définitions

Définitions : Une **fonction affine** est définie sur par , où et sont deux nombres réels.

Lorsque , la fonction définie par est une **fonction linéaire**.

Exemples :

* Fonction affine :
* Fonction linéaire :

### Variations

Propriété : Soit une fonction affine définie sur par .

Si , alors est croissante.  
Si , alors est décroissante.

Si , alors est constante.

Démonstration :

Soient et deux nombres réels tels que .

On sait que donc .

Le signe de est le même que celui de .

* Si , alors > 0 soit .

Donc estcroissante.

* Si , alors = 0 soit .

Donc est constante.

* Si , alors < 0 soit .

Donc est décroissante.

Méthode : Déterminer les variations d’une fonction affine

 **Vidéo** [**https://youtu.be/9x1mMKopdI0**](https://youtu.be/9x1mMKopdI0)

Déterminer les variations des fonctions affines suivante :

a) b) c)

**Correction**

1) donc est croissante.

2) donc est décroissante.

3) donc est décroissante.

### Représentation graphique

Propriétés :

- Une fonction affine est représentée par une droite.

- Une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l’origine du repère.

Soit la fonction affine définie par .

s’appelle le **coefficient directeur**

s’appelle l’**ordonnée à l’origine.**

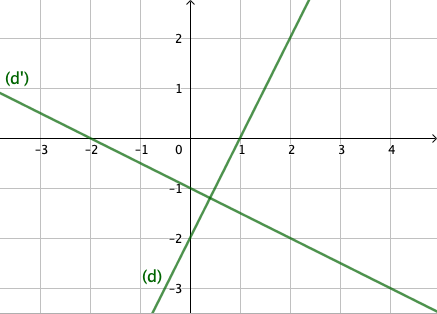
Méthode : Déterminer graphiquement une fonction affine

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OnnrfqztpTY**](https://youtu.be/OnnrfqztpTY)

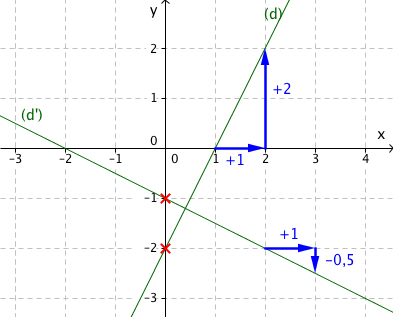
 **Vidéo** [**https://youtu.be/fq2sXpbdJQg**](https://youtu.be/fq2sXpbdJQg)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/q68CLk2CNik**](https://youtu.be/q68CLk2CNik)

Déterminer graphiquement l’expression des fonctions et représentées respectivement par les droites (d) et (d’).



**Correction**



Ce nombre s’appelle le **coefficient directeur**.

Si on avance de 1 : on monte de .

Ce nombre s’appelle l’**ordonnée à l’origine**.

se lit sur l’axe des ordonnées.

Pour (*d*) : Le coefficient directeur est

L’ordonnée à l’origine est

L’expression de la fonction est :

Pour (*d’*) : Le coefficient directeur est

L’ordonnée à l’origine est

L’expression de la fonction est:

Propriété des accroissements : Soit la fonction affine définie sur par et deux nombres réels distincts et

Alors :

Démonstration :

Comme , et on a : .

Remarque : Dans le calcul de inverser et n’a pas d’importance.

En effet :

#### Méthode : Déterminer l’expression d’une fonction affine

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ssA9Sa3yksM**](https://youtu.be/ssA9Sa3yksM)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0jX7iPWCWI4**](https://youtu.be/0jX7iPWCWI4)

Déterminer par calcul une expression de la fonction telle que :

et .

**Correction**

est une fonction affine, donc elle s’écrit sous la forme : .

* **Calcul de  :**

On a et , donc d’après la propriété des accroissements :

–

Donc : – .

* **Calcul de b :**

On a par exemple : , donc :

–

–

* D’où : – .

## Partie 3 : Cas des fonctions de référence

### Variations de la fonction carré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/B3mM6LYdsF8**](https://youtu.be/B3mM6LYdsF8)

Propriété :

La fonction carré est décroissante sur l’intervalle et croissante sur l’intervalle .

**Démonstration au programme :**

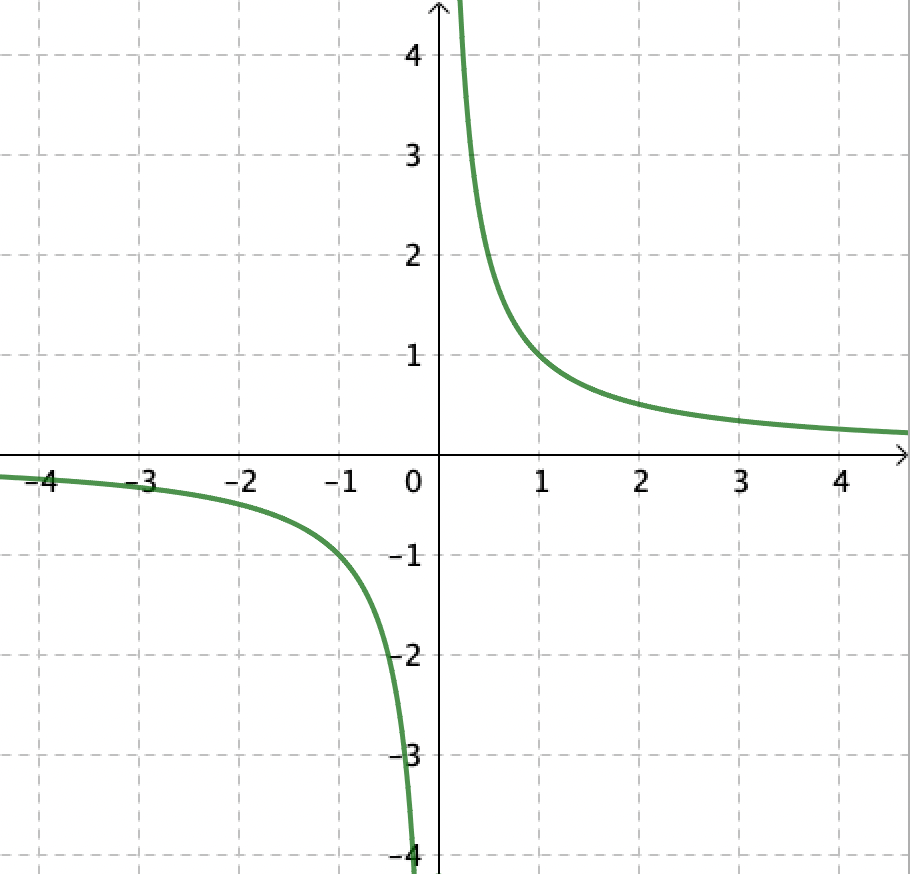
 **Vidéo** [**https://youtu.be/gu2QnY8\_9xk**](https://youtu.be/gu2QnY8_9xk)

On pose : .

* Soit et deux nombres réels quelconques positifs tels que .

Or , et donc ce qui prouve que est croissante sur l’intervalle .

* La décroissance sur l’intervalle est prouvée de manière analogue en choisissant et deux nombres réels quelconques négatifs tels que .



### Variations de la fonction inverse

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Vl2rlbFF22Y**](https://youtu.be/Vl2rlbFF22Y)

Propriété :

La fonction inverse est décroissante sur l’intervalle et décroissante sur l’intervalle .

**Démonstration au programme :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/cZYWnLA30q0**](https://youtu.be/cZYWnLA30q0)

On pose : .

- Soit et deux nombres réels strictement positifs avec *.*

– =

Or , et . Donc .

*f* est ainsi décroissante sur l’intervalle .

- La décroissance sur l’intervalle est prouvée de manière analogue.

Propriété : Si et sont deux nombres réels de même signe, on a alors :

En effet, la fonction inverse étant décroissante, l’ordre est renversé.

Méthode : Résoudre une inéquation avec la fonction inverse

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7K0171Zj5Rw**](https://youtu.be/7K0171Zj5Rw)

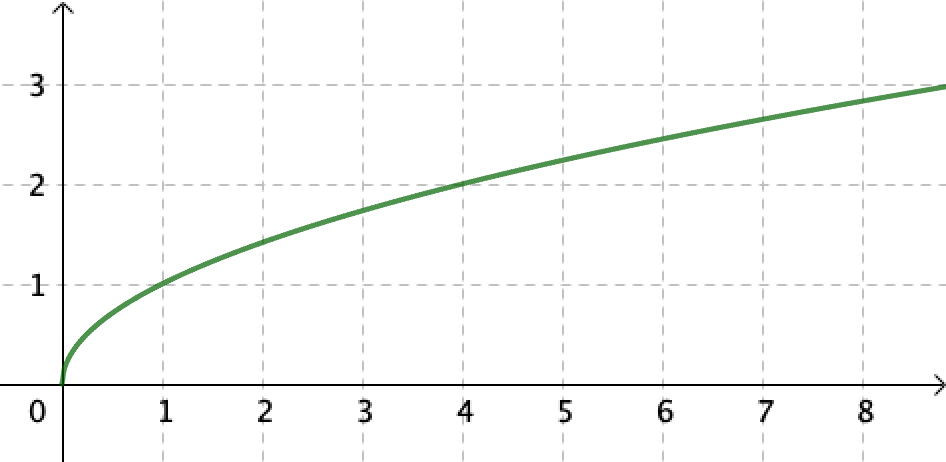
Résoudre l’inéquation suivante pour tout strictement positif :

**Correction**

← On divise de part et d’autre par 4.

← On applique la propriété donnée plus haut.

### Variations de la fonction racine carrée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/qJ-Iiz8TvZ4**](https://youtu.be/qJ-Iiz8TvZ4)

Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur l’intervalle .

**Démonstration au programme :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/1EUTIClDac4**](https://youtu.be/1EUTIClDac4)

On pose : .

Soit et deux nombres réels positifs tels que .

= = .

Or  et . Donc

Donc .

Ce qui prouve que *f* est croissante sur l’intervalle .

Propriété : Si et sont deux nombres réels positifs, on a alors :

En effet, la fonction racine carrée étant croissante, l’ordre est conservé.

### Variations de la fonction cube

 **Vidéo** [**https://youtu.be/PRSDu\_PgCZA**](https://youtu.be/PRSDu_PgCZA)

Propriété : La fonction cube est strictement croissante sur ℝ.

Propriété :

En effet, la fonction cube étant croissante, l’ordre est

conservé.

#### Méthode : Ordonner des nombres avec la fonction cube

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8h8uAq0wH1A**](https://youtu.be/8h8uAq0wH1A)

Sans calculatrice, ranger les nombres suivants dans l’ordre croissant :

**Correction**

On a :

La fonction cube conserve l’ordre.

Donc, pour ranger dans l’ordre croissant les nombres :

il suffit de ranger dans l’ordre croissant ces nombres sans l’exposant 3.

Soit, à ranger :

Or :

Donc :

Soit :



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)