MULTIPLES, DIVISEURS, NOMBRES PREMIERS

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/9l4EvLS0ezA

Partie 1 : Multiples et diviseurs

Définition : Soit a et b deux entiers naturels.
On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.

Remarque : On dit alors que b est un **diviseur** de a.

Exemple :
15 est un multiple de 3, car $15 = k \times 3$ avec $k = 5$.

Méthode : Démontrer qu'un nombre est un multiple ou un diviseur

Vidéo https://youtu.be/umlnJooSDas

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1) 36 est un multiple de 12.
2) 28 est un multiple de 8.
3) 6 est un diviseur de 54.
4) 7 est un diviseur de 24.

Correction
1) VRAI : 36 est un multiple de 12, car $36 = k \times 12$ avec $k = 3$.
2) FAUX : 28 n'est pas un multiple de 8 car il n'existe pas d'entier k tel que $28 = k \times 8$.
3) VRAI : 6 est un diviseur de 54, car $54 = k \times 6$ avec $k = 9$.
4) FAUX : 7 n'est pas un diviseur de 24 car il n'existe pas d'entier k tel que $24 = k \times 7$.

Propriété : La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Exemple :
700 et 21 sont des multiples de 7 donc :
721 = 700 + 21 est un multiple de 7.

Démonstration au programme : avec $a = 3$

Vidéo https://youtu.be/4an6JTwrJV4

Démontrons que la somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3.

Soit b et c deux multiples de 3.
Comme b est un multiple de 3, il existe un entier k_1 tel que $b = 3k_1$.
Comme c est un multiple de 3, il existe un entier k_2 tel que $c = 3k_2$.

Alors : $b + c = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) = 3k, où\ k = k_1 + k_2$.
$k = k_1 + k_2$ est un entier car somme de deux entiers, donc $b + c = 3k$ avec k entier.
$b + c$ est donc un multiple de 3.

Méthode : Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs

Vidéo https://youtu.be/7nU2M-zhAjk

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Correction
Soit trois entiers consécutifs qui peuvent donc s'écrire sous la forme :
$n, n + 1$ et $n + 2$, où n est un entier quelconque.
Leur somme est :
$S = n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$.

Donc $S = k \times 3$, avec $k = n + 1$ entier.
On en déduit que S est un multiple 3.

Partie 2 : Nombres pairs, nombres impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples :
- 34 est pair, car c'est un multiple de 2, on a $34 = 17 \times 2$
- 57 est impaire car il n'existe pas d'entier k tel que $57 = k \times 2$.

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k + 1$, avec k entier.

Exemples :
- $34 = 2 \times k$, avec $k = 17$.
- $57 = 2 \times k + 1$, avec $k = 28$.

Propriétés :

Écrit de façon abrégée, on a :
PAIR + PAIR → PAIR
PAIR + IMPAIR → IMPAIR
IMPAIR + IMPAIR → PAIR

PAIR x NOMBRE → PAIR
IMPAIR x IMPAIR → IMPAIR

Méthode : Déterminer la parité d'un nombre

Vidéo https://youtu.be/cE3gOMZ0Kko

Quelle est la parité de $5\,678\,984^2+1$

Correction

$$5\,678\,984^2 = \underbrace{5\,678\,984}_{\text{PAIR}} \times \underbrace{5\,678\,984}_{\text{PAIR}}$$

Donc $5\,678\,984^2$ est pair car PAIR × PAIR → PAIR

On peut donc écrire $5\,678\,984^2 = 2k$, avec k entier.
Et donc :
$5\,678\,984^2+1 = 2k+1$ est impair.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/eKo1MpX9ktw

Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a=2k+1$, avec k entier.
Donc $a^2=(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1 = 2k'+1$, avec $k'=2k^2+2k$.
k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2=2k'+1$ et donc a^2 est impair.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

Vidéo https://youtu.be/xCLLqx11Le0
Vidéo https://youtu.be/3Gv_z0pM9pM

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Correction
Soit deux entiers consécutifs n et $n+1$.

- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n=2k$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1)=2k(2k+1)=2k_1, avec\ k_1=k(2k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n=2k+1$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1)=(2k+1)(2k+2)=2(2k+1)(k+1)=2k_2$, avec $k_2=(2k+1)(k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Partie 3 : Nombres premiers (Rappels)

Définition : Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … Cette liste est infinie.

Remarque :
Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Méthode : Démontrer qu'un nombre est premier

Vidéo https://youtu.be/kLs0TiIz7lc

Vérifier si le nombre 97 est premier.

Règles de divisibilité (rappels) :
2 : Le chiffre des unités est pair (0, 2, 4, 6, 8).
3 : La somme des chiffres est divisible par 3.
5 : Le chiffre des unités est 0 ou 5.
9 : La somme des chiffres est divisible par 9.
10 : Le chiffre des unités est 0.

Correction

On cherche tous les diviseurs éventuels de 97 jusqu'à $\sqrt{97}$. Il n'est pas nécessaire de tester tous les entiers inférieurs à 97.

$\sqrt{97} \approx 9{,}8$
On va donc tester les entiers de 2 à 9.

- **2 :** Non ! 97 ne se termine pas par un chiffre pair.
- **3 :** Non ! 9+7=16 et 16 n'est pas divisible par 3.
- **4 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 2, ne l'est pas par 4.
- **5 :** Non ! 97 ne se termine pas par 0 ou 5.
- **6 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 2, ne l'est pas par 6.
- **7 :** Non ! 70+28=98. 70 et 28 sont divisibles par 7, donc 98 l'est et 97 ne l'est pas.
- **8 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 2, ne l'est pas par 8.
- **9 :** Non ! Un nombre qui n'est pas divisible par 3, ne l'est pas par 9.

97 n'est divisible par aucun des entiers de 2 à 9.
Donc 97 est un nombre premier.

Propriété : Tout nombre non premier peut se décomposer en produit de facteurs premiers.
L'ordre des facteurs n'a pas d'importance.

Exemple :
$300 = \mathbf{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5}$

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Méthode : Rendre une fraction irréductible

Vidéo https://youtu.be/qZaTliAWkA0

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Correction

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On ainsi les décompositions de 60 et 126 :

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

On a : $\frac{60}{126} = \frac{2\times2\times3\times5}{2\times3\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$

10 et 21 n'ont pas de diviseur commun autre que 1 et donc :

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.