

NOMBRES RÉELS

(Partie 2)

- ▶ Tout le cours sur les intervalles en vidéo : <https://youtu.be/mvJy4LVCmRI>
- ▶ Tout le cours sur les valeurs absolues en vidéo : <https://youtu.be/5-rUuceEgAE>

I. Intervalles de \mathbb{R}

1. Notations :

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.



Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : $[2 ; 4]$

Exemple :

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : $[-2 ; 7]$.

On a par exemple :

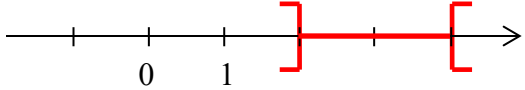
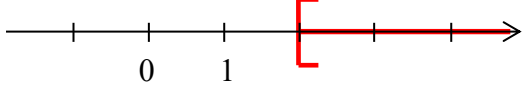
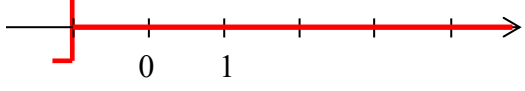
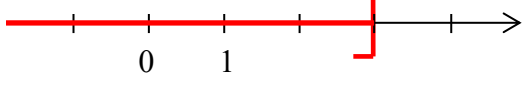
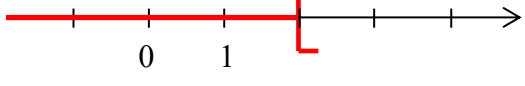
$$4 \in [-2 ; 7]$$

$$-1 \in [-2 ; 7]$$

$$8 \notin [-2 ; 7]$$

▶ Vidéo <https://youtu.be/9MtAK7Xzrls>

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[2 ; 4]$	
$-1 < x \leq 3$	$] -1 ; 3]$	
$0 \leq x < 2$	$[0 ; 2[$	

$2 < x < 4$	$]2 ; 4[$	
$x \geq 2$	$[2 ; +\infty[$ ∞ désigne l'infini	
$x > -1$	$] -1 ; +\infty[$	
$x \leq 3$	$] -\infty ; 3]$	
$x < 2$	$] -\infty ; 2[$	

Remarque : L'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est un intervalle qui peut se noter $] -\infty ; +\infty[$.

2. Application aux inéquations

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x .

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs. Pour représenter l'ensemble des solutions, on utilise un intervalle. Les techniques de résolution des inéquations sont semblables à celles utilisées pour les équations.

Méthode : Donner les solutions d'une inéquation

 **Vidéo** <https://youtu.be/p93oVqzvog8>

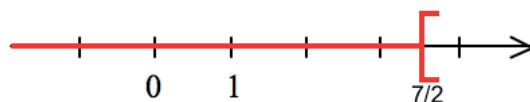
Résoudre l'inéquation et donner les solutions sous forme d'un intervalle : $2x - 3 < 4$

$$2x - 3 < 4$$

$$2x < 4 + 3$$

$$2x < 7$$

$$x < \frac{7}{2}$$



L'ensemble des solutions est l'intervalle $] -\infty ; \frac{7}{2}[$.

3. Intervalle ouvert et intervalle fermé :

Définitions :

On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.

On dit qu'il est **ouvert** dans le cas contraire.

Exemples :

▶ Vidéo https://youtu.be/II_nVCMHlu8

- L'intervalle $[-2 ; 5]$ est un intervalle fermé.

On a : $-2 \in [-2 ; 5]$ et $5 \in [-2 ; 5]$

- L'intervalle $]2 ; 6[$ est un intervalle ouvert.

On a : $2 \notin]2 ; 6[$ et $6 \notin]2 ; 6[$

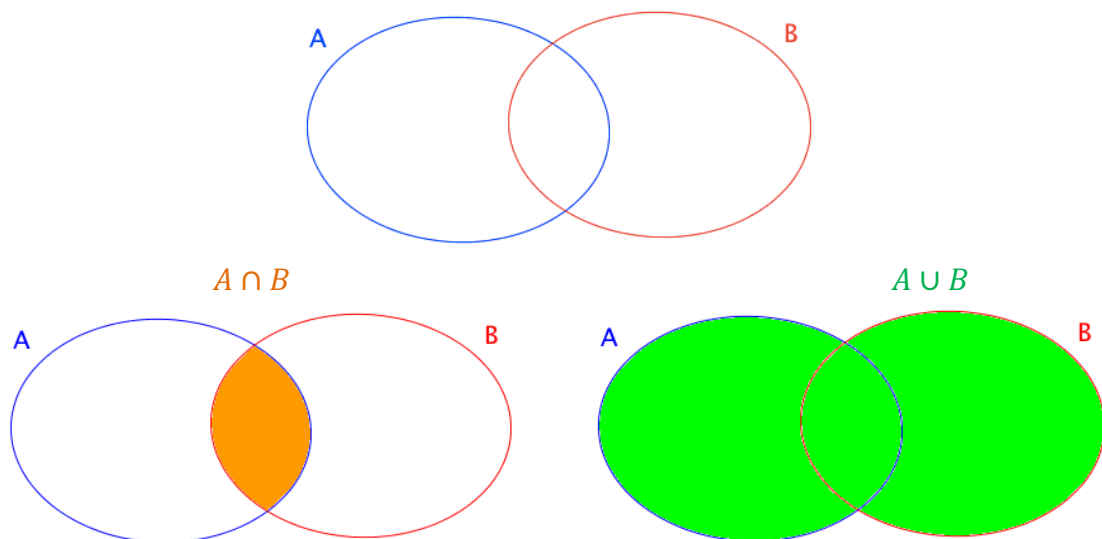
- L'intervalle $]6 ; +\infty[$ est également un intervalle ouvert.

4. Intersections et unions d'intervalles :

Définitions :

- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note $A \cap B$.

- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note $A \cup B$.



Méthode : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles

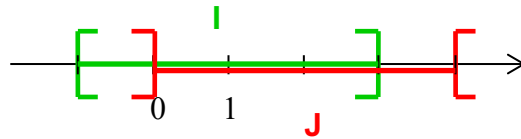
▶ Vidéo https://youtu.be/8WJG_QHQs1Y

▶ Vidéo <https://youtu.be/hzINDVy0dgg>

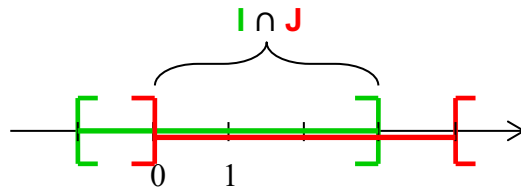
Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

1) $I = [-1 ; 3]$ et $J =]0 ; 4[$ 2) $I =]-\infty ; -1]$ et $J = [1 ; 4]$

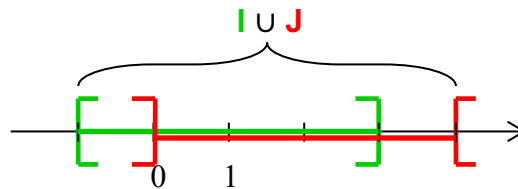
1) Pour visualiser les ensembles solutions, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.



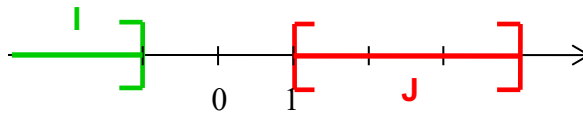
Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent à la fois aux deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué où les deux ensembles se superposent. Ainsi $I \cap J =]0 ; 3]$.



Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi $I \cup J = [-1 ; 4[$.



2)



Ici, les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun. L'intersection des deux intervalles est vide.

Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'**ensemble vide** et se note \emptyset .

On a alors : $I \cap J = \emptyset$

$I \cup J =]-\infty ; -1] \cup [1 ; 4[$

II. Valeur absolue d'un réel

► Vidéo <https://youtu.be/m3htEMfDxcE>

1. Définition

Exemples :

- La valeur absolue de -5 est égale à 5.
- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Définition : La **valeur absolue** d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre $-A$ si A est négatif.

La valeur absolue de A se note $|A|$.

Exemple : $|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{si } x \geq 5 \\ 5 - x, & \text{si } x \leq 5 \end{cases}$

Propriétés : Soit x et y deux nombres réels.

1) $|x| \geq 0$ 2) $|-x| = |x|$ 3) $\sqrt{x^2} = |x|$ 4) $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$

5) $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$

6) $|xy| = |x| \times |y|$ 7) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ pour $y \neq 0$

Exemples :

1) $|-3| = 3$ et $|3| = 3$ donc $|-3| = |3|$ 2) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ et $|-5| = 5$ donc

$\sqrt{(-5)^2} = |-5|$

2. Distance et valeur absolue

Propriété : Soit a et b deux nombres réels. Sur une droite graduée, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives les nombres a et b est le nombre $|a - b|$.

Exemple :

Calculer la distance entre les nombres $-1,5$ et 4 .

$d(-1,5 ; 4) = |4 - (-1,5)| = 5,5$



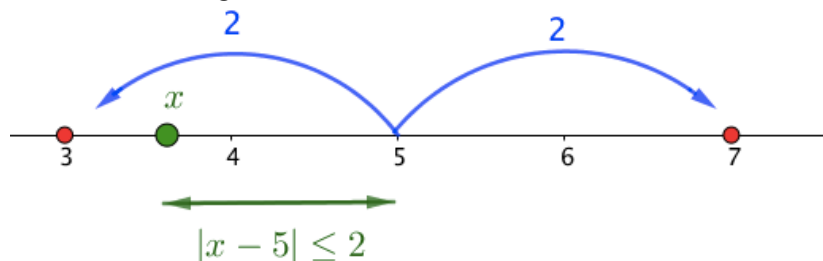
Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}$.

Dire que x est tel que $|x - a| \leq r$ signifie que x appartient à l'intervalle $[a - r ; a + r]$.

Exemple :

Soit un réel x tel que $|x - 5| \leq 2$. Cela signifie que $x \in [5 - 2 ; 5 + 2]$ soit $x \in [3 ; 7]$.

Géométriquement, cela se traduit par le fait que la distance du point d'abscisse x au point d'abscisse 5 est inférieure ou égale à 2.



© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr