

PRODUIT SCALAIRE (Partie 2)

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/dll7myZuLvo>

I. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

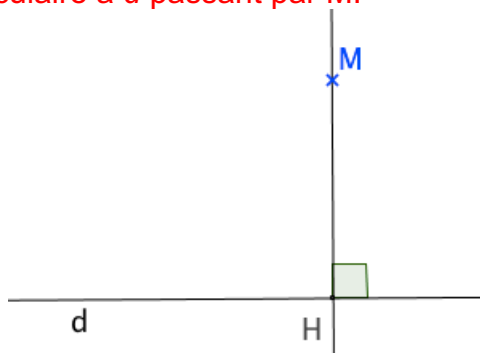
$$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

\Leftrightarrow Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite d et un point M du plan.

Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .

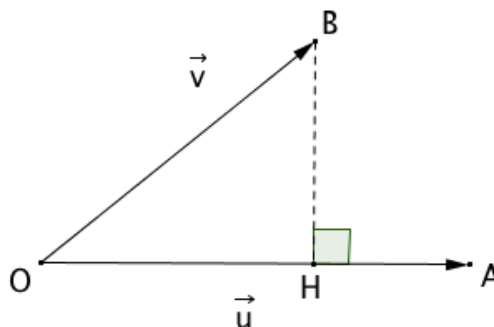


Propriété : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls

du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$



Démonstration :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}\end{aligned}$$

En effet, les vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{HB} sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

▶ Vidéo <https://youtu.be/2eTsaa2vVnl>

Soit un carré ABCD de côté c .

Calculer, en fonction de c , les produits scalaires :

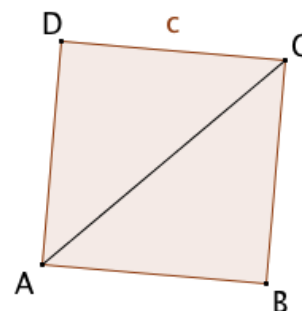
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

a) Par projection, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont orthogonaux.

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -c^2$



3) Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Propriété : L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration au programme :

Soit O le milieu du segment [AB].

On a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = 0$$

Comme O est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$

Soit :

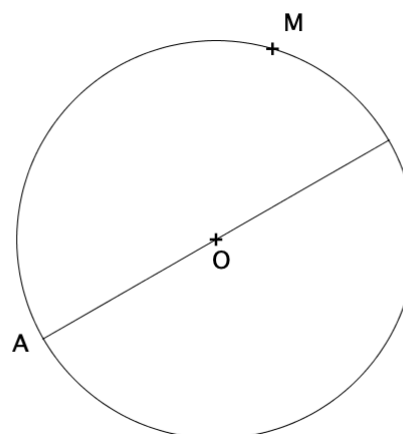
$$(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \quad \text{car } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$$

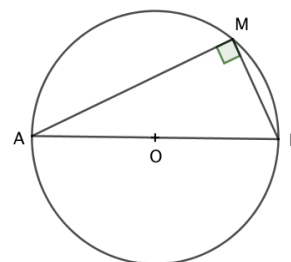
Soit : $MO^2 = OA^2$ soit encore $MO = OA$.

M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].



Propriété : Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.

Justification : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ si et seulement si les vecteurs \vec{MA} et \vec{MB} sont orthogonaux.



II. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}; \vec{j})$.

Propriété : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $(x ; y)$ et $(x' ; y')$.
On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j})(x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\ &= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} \\ &= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\|\vec{j}\|^2 \\ &= xx' + yy' \end{aligned}$$

car $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, le repère étant normé,
et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, le repère étant orthogonal.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

▶ Vidéo <https://youtu.be/aOLRbG0libY>

▶ Vidéo <https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ>

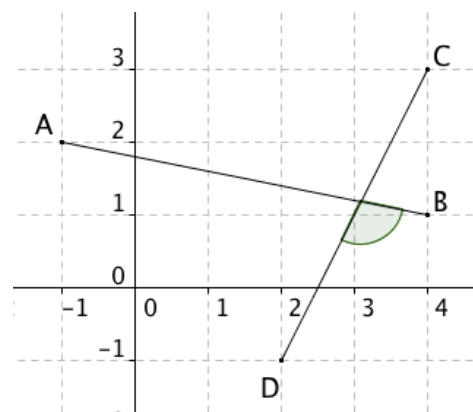
Soit $\vec{u}(5 ; -4)$ et $\vec{v}(-3 ; 7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$$

Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

▶ Vidéo https://youtu.be/ca_pW79ik9A

Calculer la mesure de l'angle $(\vec{AB} ; \vec{CD})$ en lisant les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.



On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \\ &= \sqrt{(4 - (-1))^2 + (2 - 1)^2} \times \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - (-1))^2} \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \\ &= \sqrt{520} \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \\ &= 2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})\end{aligned}$$

On a également : $\overrightarrow{AB}(5; -1)$ et $\overrightarrow{CD}(-2; -4)$, donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 5 \times (-2) + (-1) \times (-4) = -6$$

$$\text{On a ainsi : } 2\sqrt{130} \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = -6$$

$$\text{Et donc : } \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = -\frac{6}{2\sqrt{130}} = -\frac{3}{\sqrt{130}}$$

$$\text{Et : } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \approx 105,3^\circ.$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales