PRODUIT SCALAIRE – Chapitre 2/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/dII7myZuLvo

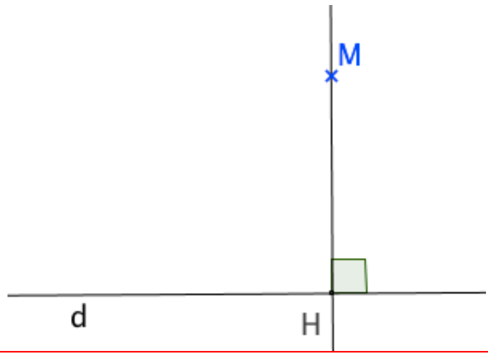
Partie 1 : Produit scalaire et orthogonalité

1) Projeté orthogonal

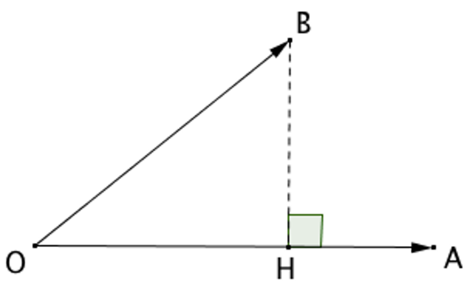
Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration :
Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.
$\vec{u}.\vec{v} = 0$
$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Définition : Soit une droite *d* et un point M.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



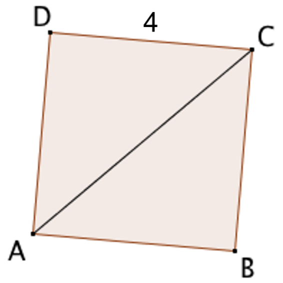
Propriété : Soit $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs non nuls.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



Démonstration :
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}\right)$, d'après la relation de Chasles.
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$
En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = 0$.

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

Vidéo https://youtu.be/2eTsaa2vVnI
Vidéo https://youtu.be/K4Izn5xB_Qk
Vidéo https://youtu.be/-Hr28g0PFu0



Soit un carré $ABCD$ de côté 4.
Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

Correction

a) B est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = 4^2 = 16$

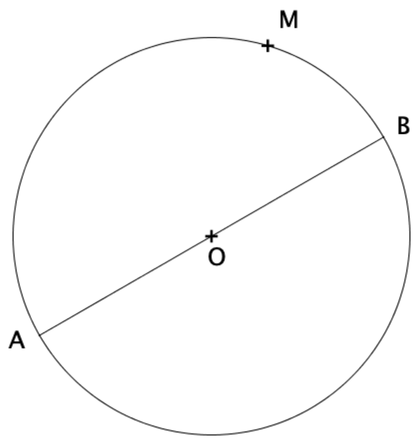
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

c) Comme $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$, on a :
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -AD^2 = -16$

2) Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété : L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

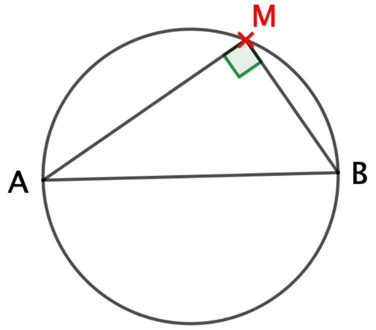
Démonstration au programme :
Vidéo https://youtu.be/D3n8aYsSQLA



Soit O le milieu du segment $[AB]$.
On a :
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = 0$
Comme O est le milieu de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$
Soit :
$(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0$ car $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$

Soit : $MO^2 = OA^2$ soit encore $MO = OA$.
M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Comme $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.
L'ensemble des points M tel que le triangle ABM soit rectangle en M est donc le cercle de diamètre $[AB]$.



Méthode : Appliquer l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

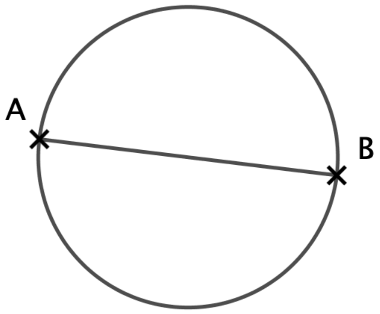
Vidéo https://youtu.be/bUARS-dthLM

On donne deux points A et B.
Représenter l'ensemble des points P, tel que : $PB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PB}$

Correction

$PB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PB}$
$PB^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PB} = 0$
$\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PB} = 0$
$\overrightarrow{PB}.\left(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{AB}\right) = 0$
$\overrightarrow{PB}.\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}\right) = 0$
$\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PA} = 0$, d'après la relation de Chasles.

L'ensemble des points P est donc le cercle de diamètre $[AB]$.



Partie 2 : Produit scalaire dans un repère orthonormé

Dans cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées (1)

Vidéo https://youtu.be/aOLRbG0IibY

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

Correction

$\vec{u}.\vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées (2)

Vidéo https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ

On considère quatre points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Correction

- Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5-1\\-2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$

- Calculons le produit scalaire des deux vecteurs :

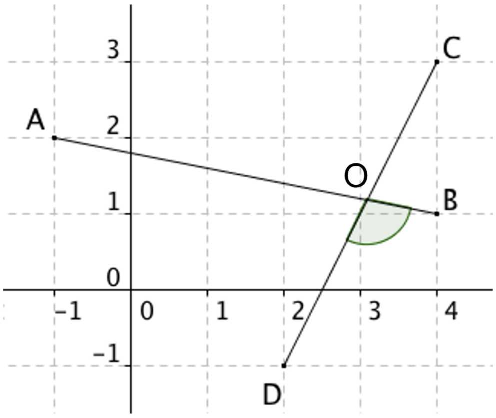
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=3\times 4+2\times(-6)=12-12=0$

- Le produit scalaire est nul donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.
Et donc, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Méthode : Appliquer plusieurs formules du produit scalaire

Vidéo https://youtu.be/Ok6dZG8WIL8

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BOD}$ en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ de deux façons.
On pourra lire les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère ci-contre.



Correction

● En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ avec la formule du cosinus, on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=AB\times CD\times\cos(\widehat{BOD})$

Or : $AB=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

$CD=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\sqrt{26}\times\sqrt{20}\times\cos(\widehat{BOD})$

$=\sqrt{520}\times\cos(\widehat{BOD})$

● En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ avec la formule des coordonnées, on a :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$, donc :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=5\times(-2)+(-1)\times(-4)=-6$

● On a ainsi : $\sqrt{520} \times \cos\left(\widehat{BOD}\right) = -6$

$$\cos\left(\widehat{BOD}\right) = -\frac{6}{\sqrt{520}} = -\frac{6}{2\sqrt{130}} = -\frac{3}{\sqrt{130}}$$

Et donc : $\widehat{BOD} \approx 105{,}3°$.