PUISSANCES ET RACINES CARRÉES

Tout le cours sur les puissances en vidéo : https://youtu.be/XA-JkXirNz4

Tout le cours sur les racines carrées en vidéo : https://youtu.be/8Atxa6iMVsw

I. Calculs sur les puissances

1) Exemples

3 à la puissance 4	5 à la puissance 3	0 à la puissance 6	1 à la puissance 5	9 à la puissance 1	–3 à la puissance 4
3^4	5^3	0^6	1^5	9^1	$(-3)^4$
3x3x3x3	5x5x5	0x0x0x0x0x0	1x1x1x1x1	9	(–3)x(–3)x(–3)x(–3)
81	125	0	1	9	81

$a^4 = a \times a \times a \times a$ et de façon générale $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (avec n facteurs a)

2) Cas particuliers

$a^1 = a$ pour tout nombre a

$a^0 = 1$ pour tout nombre a (non nul)

$0^p = 0$ pour tout nombre p (non nul)

$1^p = 1$ pour tout nombre p

3) Attention aux signes !

Ne pas confondre : $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

et : $-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81$

Calculer de même en appliquant la règle des signes :

$(-5)^2$; -1^2 ; $(-1)^2$; -3^3 ; $(-2)^2$; -7^2 ; $(-9)^0$; -9^0

Réponses : *25 ; –1 ; 1 ; –27 ; 4 ; –49 ; 1 ; –1*

4) Opérations sur les puissances

Avec $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$

$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a^n)^p = a^{n \times p}$	$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Méthode : Effectuer des calculs sur les puissances

Vidéo https://youtu.be/FBmVDGvUtJ4
Vidéo https://youtu.be/cY6xdxT7kLM

Exprimer sous la forme d'une seule puissance :

$A = 4^5 \times 4^7$ $\quad B = \frac{5^4}{5^6}$ $\quad C = 7^3 \times (7^2)^6$

$D = 6^7 \times 9^7$

$A = 4^5 \times 4^7$
$= 4^{5+7}$
$= 4^{12}$

$B = \frac{5^4}{5^6}$
$= 5^{4-6}$
$= 5^{-2}$

$C = 7^3 \times (7^2)^6$
$= 7^3 \times 7^{2\times 6}$
$= 7^3 \times 7^{12}$
$= 7^{3+12}$
$= 7^{15}$

$D = 6^7 \times 9^7$
$= (6 \times 9)^7$
$= 54^7$

II. Calculs sur les racines carrées

1) Définition

Exemples : $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$
$2,6^2 = 6,76$ donc $\sqrt{6,76} = 2,6$

La racine carrée de a est le nombre (toujours positif) dont le carré est a.

Remarque :
$\sqrt{-5} = ?$
La racine carrée de –5 est le nombre dont le carré est –5 !
Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.
$\sqrt{-5}$ n'existe pas !

Quelques exemples : $\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ $\sqrt{3} \approx 1{,}732$

$\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels.

Racines de carrés parfaits

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{169} = 13$

2) Propriétés sur les racines carrées

a) Exemples :

$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = +5 = 5$

$\sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9$

Pour un nombre a positif, on a $\sqrt{a^2} = a$

Pour un nombre a négatif, on a $\sqrt{a^2} = -a$

b) Opérations sur les racines carrées

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{a+b}$	$\sqrt{a-b}$	$\sqrt{a\times b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
9	16	3	4	7	–1	12	0,75	5	Imp.	12	0,75
25	4	5	2	7	3	10	2,5	≈5,4	≈4,6	10	2,5
36	16	6	4	10	2	24	1,5	≈7,2	≈4,5	24	1,5

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Démonstration au programme : Pour le produit :

Vidéo https://youtu.be/gzp16wnchaU

- $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$
- $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$ car a et b sont positifs

Donc $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a \times b}\right)^2$ et donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

Remarque :
Par contre,
$\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/fkE5KngvcCA

On va démontrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
En effet, on a par exemple :

- $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$
- $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a+b$

Donc $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{a+b}\right)^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$
Et donc $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Méthode : Effectuer des calculs sur les racines carrées

Vidéo https://youtu.be/CrTjK3Qa72s

Écrire le plus simplement possible :

A = $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$ B = $\sqrt{3} \times \sqrt{27}$ C = $\sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3}$
D = $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ E = $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$ F = $\left(4\sqrt{5}\right)^2$
G = $\dfrac{\sqrt{32}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}}$

$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$
$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$
$C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$
$D = \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$
$E = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\dfrac{50}{72}} = \sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \dfrac{5}{6}$
$F = \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 16 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 16 \times 5 = 80$
$G = \dfrac{\sqrt{32}\times\sqrt{10}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\dfrac{32\times 10}{80}} = \sqrt{4} = 2$

3) Extraire un carré parfait

Méthode : Extraire un carré parfait

Vidéo https://youtu.be/cz27kb_qTy4

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :

A = $\sqrt{72}$ B = $\sqrt{45}$ C = $3\sqrt{125}$

A = $\sqrt{72}$

= $\sqrt{9 \times 8}$ ← *On fait « apparaître » dans 72 un carré parfait : 9*

= $\sqrt{9}$ *x* $\sqrt{8}$ ← *On extrait cette racine en appliquant une formule*

= 3 x $\sqrt{8}$ ← *On simplifie la racine du carré parfait*

= 3 x $\sqrt{4 \times 2}$ ← *On recommence si possible*

= 3 x $\sqrt{4}$ x $\sqrt{2}$

= 3 x 2 x $\sqrt{2}$

= $6\sqrt{2}$ ← *On s'arrête, 2 ne « contient » pas de carré parfait*

B = $\sqrt{45}$

= $\sqrt{9 \times 5}$

= $3\sqrt{5}$

C = $3\sqrt{125}$

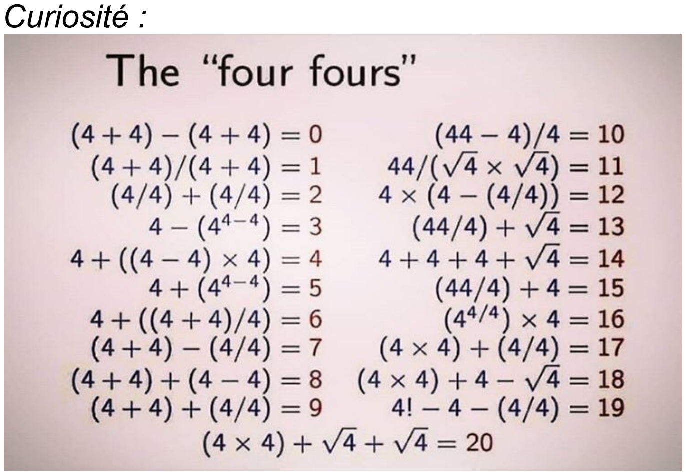
= $3\sqrt{25 \times 5}$

= 3 x 5 $\sqrt{5}$

= $15\sqrt{5}$

Remarque : Pour que b soit le plus petit possible, b ne doit pas contenir de carré parfait.

Curiosité :



4) Simplifier les écritures contenant des racines carrées

Méthode : Simplifier une écriture contenant des racines carrées

Vidéo https://youtu.be/8pB5pq2MyDM
Vidéo https://youtu.be/MXJYntzumDo

1) Écrire le plus simplement possible :
A = $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
B = $7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$
C = $\left(3 - 2\sqrt{3}\right) - \left(4 - 6\sqrt{3}\right)$

2) Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible :
D = $\sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$
E = $\sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$

1) On regroupe les membres d'une même « famille de racines carrées » pour réduire l'expression.
Les différentes familles de racines carrées sont : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \ldots$

A = $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$
 = $8\sqrt{3}$

B = $7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5}$
 = $15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

C = $\left(3 - 2\sqrt{3}\right) - \left(4 - 6\sqrt{3}\right)$
 = $3 - 2\sqrt{3} - 4 + 6\sqrt{3}$
 = $-1 + 4\sqrt{3}$

2) On fait apparaître des racines carrées d'une même famille. Pour cela, il faut extraire des carrés parfaits.

D = $\sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ ← *$\sqrt{12}$ et $\sqrt{27}$ sont des « $\sqrt{3}$ déguisées »*
 = $\sqrt{4 \times 3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3}$ ← *Elles sont maintenant « démasquées » !*
 = $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$ ← *On peut alors réduire l'expression*
 = $6\sqrt{3}$

E = $\sqrt{125} - 2\sqrt{20} + 6\sqrt{80}$
 = $\sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt{4 \times 5} + 6\sqrt{16 \times 5}$
 = $5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} + 6 \times 4\sqrt{5} = 25\sqrt{5}$

5) Racines carrées et développements

Méthode : Effectuer des développements avec des racines carrées

Vidéo https://youtu.be/xmtZS0GwV_Y

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers relatifs :

A = $\left(\sqrt{3} - 4\right)^2$
B = $\left(3 + \sqrt{5}\right)^2$
C = $\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$
D = $\left(3 + \sqrt{3}\right)\left(4 - 2\sqrt{3}\right)$

← On applique les règles classiques de développement d'une expression comme on pourrait le faire sur des expressions algébriques.
Les radicaux sont alors « traités » comme l'inconnue.

A = $\left(\sqrt{3} - 4\right)^2$ ← *On applique la 2ᵉ identité remarquable*
= $\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 4 + 4^2$
= $3 - 8\sqrt{3} + 16$
= $19 - 8\sqrt{3}$

B = $\left(3 + \sqrt{5}\right)^2$ ← *On applique la 1ère identité remarquable*
= $(3)^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2$
= $9 + 6\sqrt{5} + 5$
= $14 + 6\sqrt{5}$

C = $\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ ← *On applique la 3ᵉ identité remarquable*
= $\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$
= 2 – 5
= –3

D = $\left(3 + \sqrt{3}\right)\left(4 - 2\sqrt{3}\right)$ ← *On applique la double distributivité*
= $12 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3}\right)^2$
= $12 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2 \times 3$
= $6 - 2\sqrt{3}$