

GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/EehP4SFpo5c>

Dans tout le chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Partie 1 : Rappels

▶ Rappels du cours de 2de en vidéo : <https://youtu.be/d-rUnClmcCY>

Propriétés :

- Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.
- Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.
- Soit deux points $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

La distance AB (ou la norme de \overrightarrow{AB}) est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont : $\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur (1)

▶ Vidéo <https://youtu.be/NosYmLLFB4>

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Correction

La droite d admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

- Comme $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d , on a : $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Soit $a = 5$ et $b = 1$.

Une équation de d est donc de la forme $5x + 1y + c = 0$.

- Pour déterminer c , il suffit de substituer les coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ de A dans l'équation :

$$5 \times 3 + 1 \times 1 + c = 0$$

$$15 + 1 + c = 0$$

$$16 + c = 0$$

$$c = -16$$

Une équation de d est donc $5x + y - 16 = 0$.

Remarque

Une autre méthode consiste à utiliser la colinéarité :

Soit un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la droite d .

Comme le point A appartient également à d , les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit :

$$5(x-3) - (-1)(y-1) = 0.$$

$$\text{Soit encore : } 5x + y - 16 = 0.$$

Une équation cartésienne de d est : $5x + y - 16 = 0$.

Méthode : Déterminer une équation de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur (2)

📺 Vidéo <https://youtu.be/i5WD8IZdEqk>

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Correction

• B et C appartiennent à d donc \overrightarrow{BC} est un vecteur directeur de d .

On a : $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Donc $a = -6$ et $b = 4$.

Une équation cartésienne de d est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.

• $B \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient à d donc : $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$ donc $c = 18$.

Une équation cartésienne de d est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $-3x + 2y + 9 = 0$.

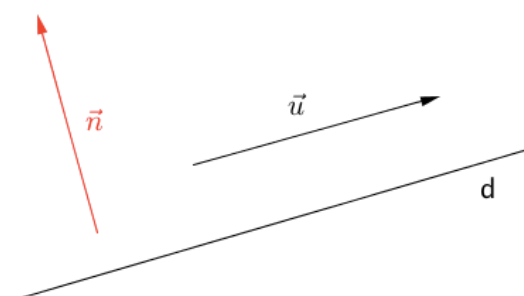
Tracer une droite dans un repère :

📺 Vidéo <https://youtu.be/EchUv2cGtzo>

Partie 2 : Vecteur normal à une droite

Définition : Soit une droite d .

On appelle **vecteur normal** à la droite d , un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .



\vec{u} est le vecteur directeur
 \vec{n} est le vecteur normal

Propriété : - Une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

- Réciproquement, la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Démonstration :

- Soit un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ de la droite.

$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un point de la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Soit : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Soit encore : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$

$ax + by - ax_A - by_A = 0$.

- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de la droite alors $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs \vec{u} et \vec{n} sont orthogonaux.

Exemple :

Soit la droite d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$.

Un vecteur normal de la droite est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la droite est : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On vérifie que \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times 3 + (-3) \times 2 = 0$

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

 Vidéo <https://youtu.be/oR5QoWCiDlo>

On considère la droite d passant par le point $A \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d .

Correction

• Comme $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de d , une équation cartésienne de d est de la forme $3x - y + c = 0$

• Le point $A \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d , donc : $3 \times (-5) - 4 + c = 0$ et donc : $c = 19$.

Une équation cartésienne de d est : $3x - y + 19 = 0$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

 Vidéo <https://youtu.be/-HNUbyU72Pc>

Soit la droite d d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de A sur la droite d .

Correction

- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :

Comme d et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de d est un vecteur normal de (AH) .

Une équation cartésienne de d est $x + 3y - 4 = 0$, donc le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Et donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (AH) .

Une équation de (AH) est de la forme :

$$-3x + y + c = 0.$$

Or, le point $A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient à (AH) , donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.

On a : $-3 \times 2 + 4 + c = 0$ soit $c = 2$.

Une équation de (AH) est donc : $-3x + y + 2 = 0$.

- H est le point d'intersection de d et (AH) , donc ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y + 4 \\ -3(-3y + 4) + y + 2 = 0 \end{cases}$$

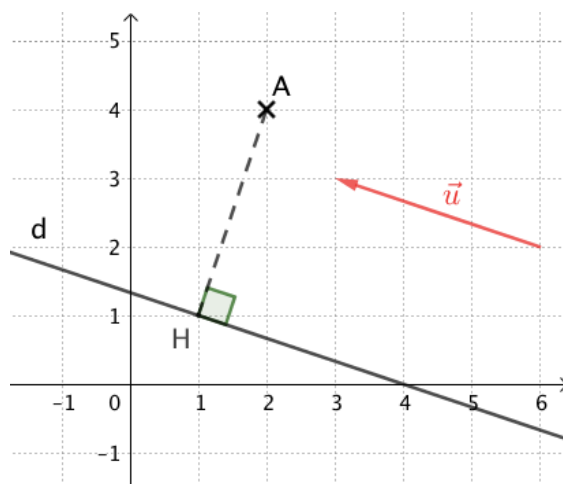
$$\begin{cases} x = -3y + 4 \\ 9y - 12 + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y + 4 \\ y = \frac{10}{10} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \times 1 + 4 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Le point H , projeté orthogonal de A sur la droite d , a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Partie 3 : Équations de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de rayon r est :
 $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$

Éléments de démonstration :

Tout point $M(x ; y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon r si et seulement $AM^2 = r^2$.

Exemple :

Le cercle de de centre $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de rayon 5 a pour équation : $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

 Vidéo <https://youtu.be/Nr4Fcr-GhXM>

On considère le cercle de centre $A \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et passant par le point $B \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
 Déterminer une équation du cercle.

Correction

• Le cercle a pour centre le point $A \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc une équation du cercle est de la forme :

$$(x - 4)^2 + (y - (-1))^2 = r^2$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = r^2$$

• On détermine le carré du rayon du cercle à l'aide de la formule de la distance :

$$r^2 = AB^2 = (3 - 4)^2 + (5 - (-1))^2 = (-1)^2 + 6^2 = 37$$

• Une équation cartésienne du cercle est alors : $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 37$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

 Vidéo <https://youtu.be/nNidpOAhLE8>

L'équation $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$ est-elle une équation de cercle ? Si oui, déterminer son centre et son rayon.

Correction

$$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) + 17 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 10y + 25) - 25 + 17 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 5)^2 - 25 + 17 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

← car $x^2 - 2x$ est le début du développement de $(x - 1)^2$ et $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 3^2$$

Il s'agit d'une équation du cercle de centre $A \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de rayon 3.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales