GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/8I6dotcdW3I**](https://youtu.be/8I6dotcdW3I)



Dès l'Antiquité, *Archimède de Syracuse* (-287 ; -212), met en œuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre . Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. Par ce procéde, *Archimède* donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique.

Vers la fin du XVIIe siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pour des problèmes de longueurs, d'aires, …

Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaitra qu'au début du XIXe siècle avec le mathématicien français *Augustin Louis Cauchy* (1789 ; 1857) *– ci-contre*.

**Partie 1 : Définition et représentation graphique**

1) Définition d'une suite

Exemple d'introduction :

On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, …

On note l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :

 : le premier terme de la suite

  : le 2e terme

 : le 3e terme

 …

On a ainsi défini une suite numérique.

Définitions :

- Une **suite**  est une liste ordonnée de nombres telle qu'à tout entier , on associe un nombre réel noté .

- , , , … sont appelés les **termes** de la suite.

- est appelé le **rang**.

Remarque :

Une suite peut être associée à une fonction définie par  :

2) Suites définies en fonction de (forme explicite)

Méthode : Calculer des termes d’une suite définies en fonction de

 **Vidéo** [**https://youtu.be/HacflVQ7DIE**](https://youtu.be/HacflVQ7DIE) **(1er exemple)**

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a) b)

**Correction**

a) On considère :

Les premiers termes de cette suite sont donc :

← On remplace par 0

← On remplace par 1

b) On considère : .

Les premiers termes de cette suite sont donc :

3) Suites définies par récurrence

Chaque terme de la suite s'obtient à partir du terme précédent.

On exprime en général en fonction de . En effet, les termes et se suivent.

Par exemple, et se suivent.

Méthode : Calculer des termes d’une suite définie par récurrence (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/C38g2fHFttw**](https://youtu.be/C38g2fHFttw) **(2e exemple)**

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes :

a) Pour tout entier , on donne :

b) Pour tout entier , on donne :

**Correction**

a) La suite est définie par et pour tout entier , on a .

Par cette suite, chaque terme est le triple de son précédent.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

← On remplace par sa valeur.

2) La suite est définie par et pour tout entier , on a .

Les premiers termes de cette suite sont donc :

Méthode : Calculer des termes d’une suite définie par récurrence (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/C38g2fHFttw**](https://youtu.be/C38g2fHFttw)

Pour tout entier , on donne : .

Calculer les quatre premiers termes de la suite.

**Correction**

Dans cet exercice, le premier terme est *.*

La suite est définie par et pour tout entier , on a .

Les premiers termes de cette suite sont donc :

← est égal à 1

← est égal à 2

← est égal à 3

Remarque : Contrairement à une suite définie en fonction de , il n'est par exemple pas possible de calculer sans connaître pour une suite définie par récurrence.

Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

Cependant, il est possible d'écrire un algorithme avec Python calculant les termes successifs d’une suite définie par récurrence.

Méthode : Calculer un terme à l’aide d’un algorithme

 **Vidéos** [**https://youtu.be/CYDUNYndHfg**](https://youtu.be/CYDUNYndHfg)

Pour tout entier , on donne :

Écrire un programme Python permettant de calculer les termes de la suite .

Afficher le terme .

**Correction**

Une image contenant texte

Description générée automatiquement Une image contenant texte

Description générée automatiquement

4) Représentation graphique d'une suite

Méthode : Représenter graphiquement une suite

 **Vidéo** [**https://youtu.be/VpSK4uLTFhM**](https://youtu.be/VpSK4uLTFhM)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/whjDbPyJMXk**](https://youtu.be/whjDbPyJMXk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ycFal1d\_QcE**](https://youtu.be/ycFal1d_QcE)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Ol2wPXZTyG0**](https://youtu.be/Ol2wPXZTyG0)

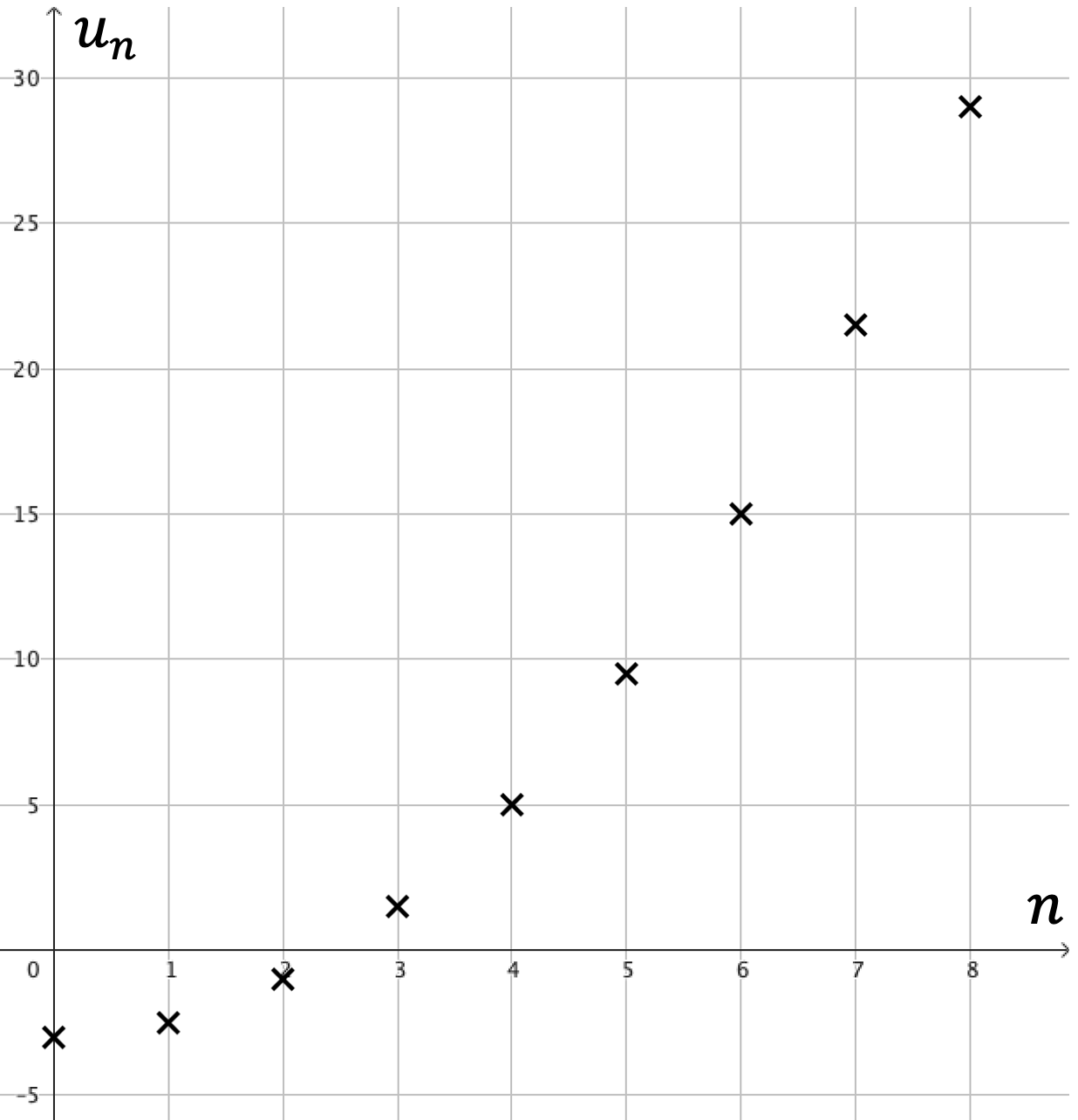
Pour tout entier , on donne : – 3.

Représenter dans un repère les premiers termes de la suite .

**Correction**

On construit un tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  | -3 | -2,5 | -1 | 1,5 | 5 | 9,5 | 15 | 21,5 | 29 |

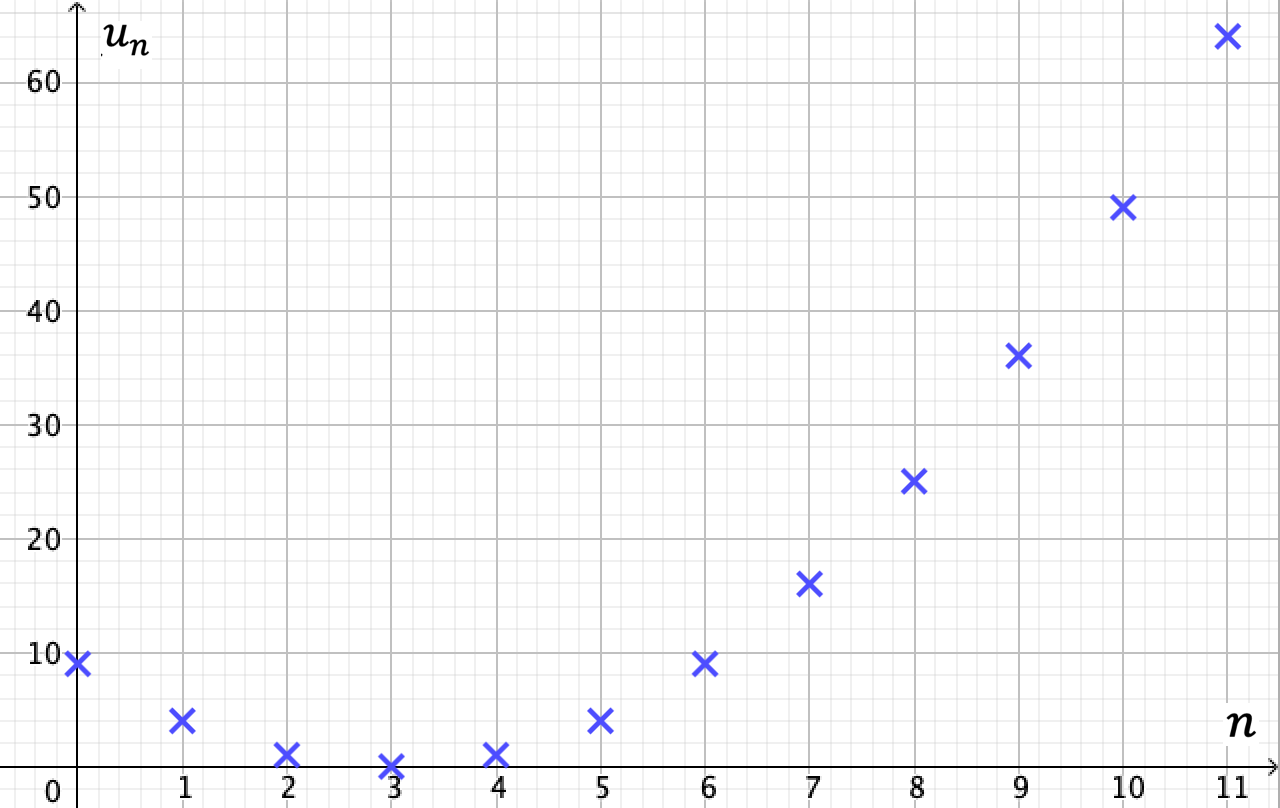


Dans un repère du plan, on représente la suite par un nuage de points de coordonnées .

**Partie 2 : Sens de variation d'une suite numérique**

Exemple :

On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite :

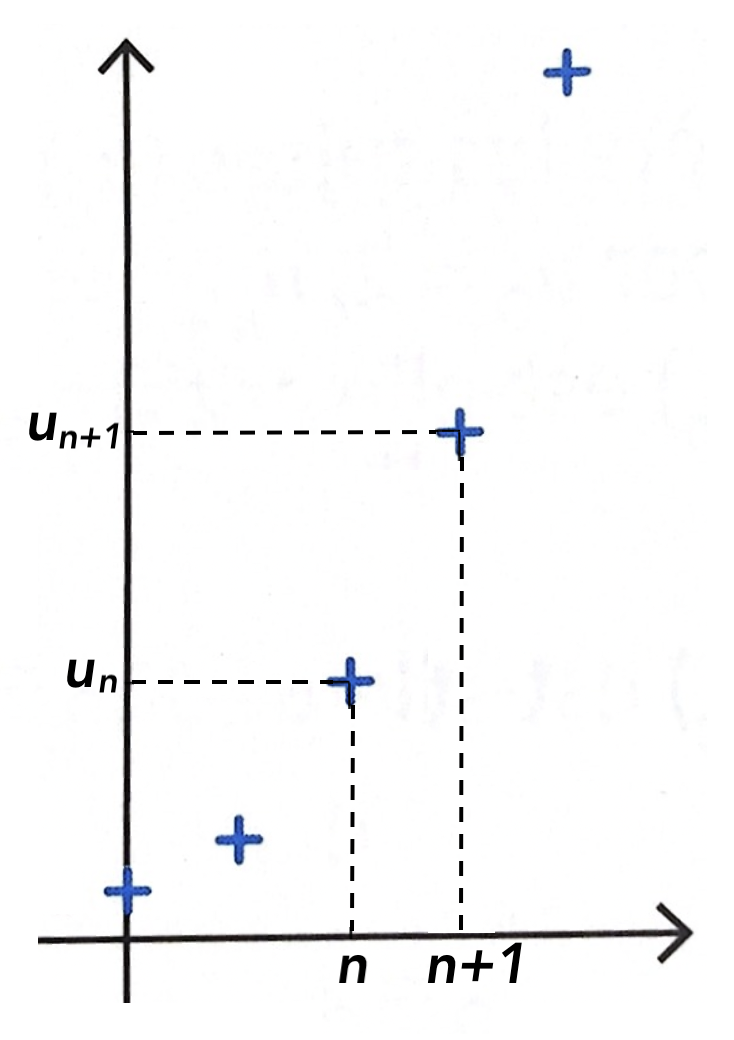
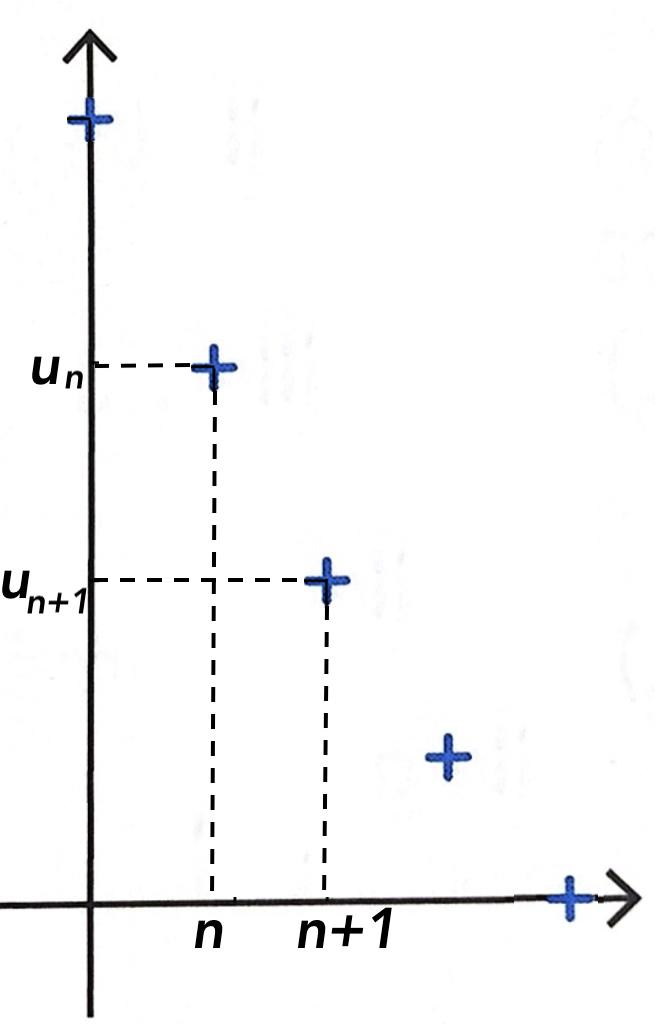


On observe graphiquement que cette suite est croissante à partir du rang .

Définitions :

- La suite est **croissante à partir d’un certain rang** signifie que à partir de ce rang.

- La suite est **décroissante à partir d’un certain rang** signifie que à partir de ce rang.

Remarques :

* Pour une suite constante, on a
* Lorsqu’on a , on dit que est strictement croissante.
* Lorsqu’on a , on dit que est strictement décroissante.

Méthode : Étudier le sens de variation d’une suite

 **Vidéo** [**https://youtu.be/DFz8LDKCw9Y**](https://youtu.be/DFz8LDKCw9Y)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/R8a60pQwiOQ**](https://youtu.be/R8a60pQwiOQ)

a) Pour tout entier , on donne : .

Démontrer que la suite est croissante à partir d'un certain rang à déterminer.

b) Pour tout de \*, on donne : .

Démontrer que la suite est décroissante.

**Correction**

a) - On commence par calculer la différence :

On calcule  :

Si

la suite est croissante.

Si ,

la suite est décroissante.

- On étudie ensuite le signe de :

pour donc pour .

Soit , car est entier.

- On a : donc , pour .

On en déduit qu'à partir du rang 2, la suite est croissante.

b) On commence par calculer le rapport :

Or , donc : et donc (car ).

On en déduit que est décroissante.

Méthode : Étudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/dPR3GyQycH0**](https://youtu.be/dPR3GyQycH0)

Pour tout de, on donne : .

a) On considère la fonction associée définie sur par .

Démontrer que la fonction est décroissante sur .

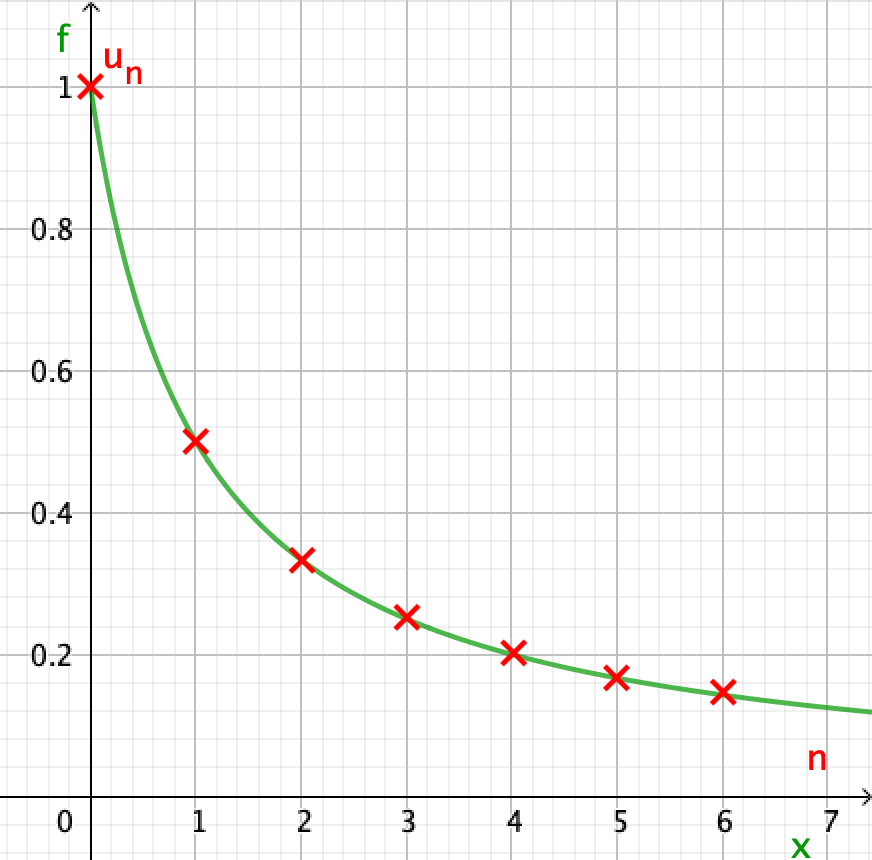
b) En déduire que la suite est décroissante.

**Correction**

a) Étudions les variations de la fonction définie sur . Pour cela, on va étudier le signe de la dérivée.

Pour tout de , on a : , car est toujours strictement positif.

Donc est strictement décroissante sur .

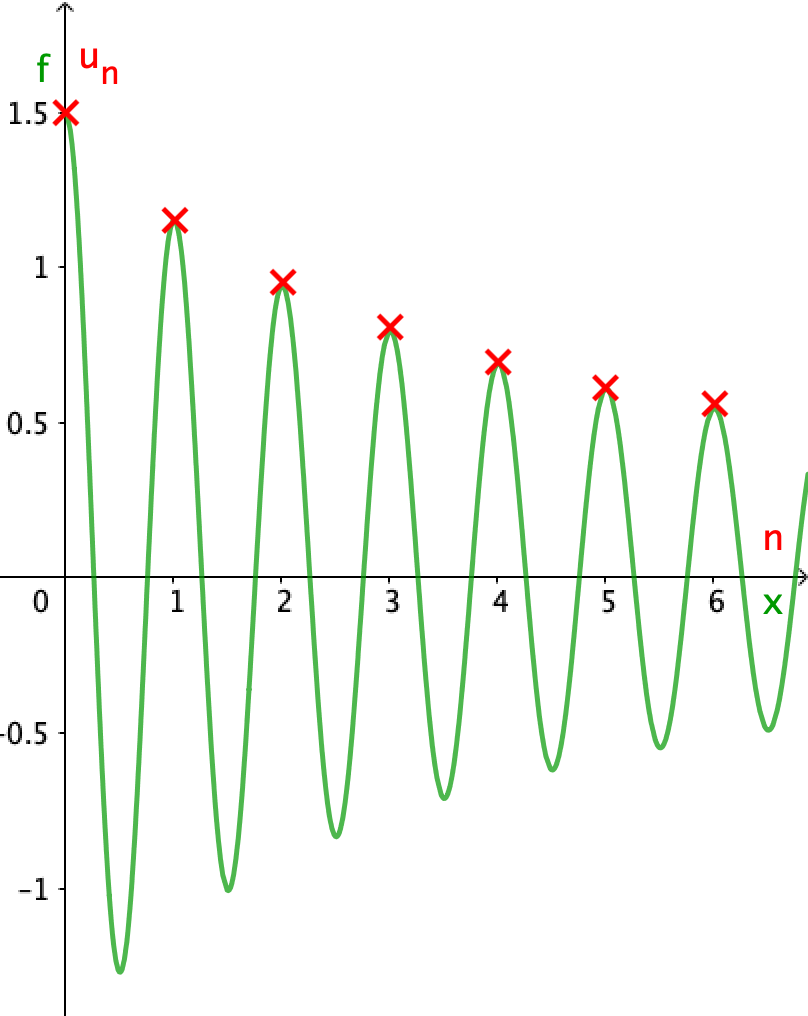
b) On a : et .

est strictement décroissante pour tout réel positif, donc :

est strictement décroissante pour tout entier positif, donc :

est strictement décroissante pour tout entier positif.

En effet, et ont la même expression et sont égales pour des valeurs entières positives.



⚠️ Remarque :

En général, si la suite est décroissante, cela ne signifie pas que la fonction est décroissante.

La représentation suivante montre une suite décroissante alors que la fonction associée n'est pas décroissante.

**Partie 3 : Notion de limite d'une suite**

Exemple :

Pour tout de , on donne : .

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite de plus en plus grands :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 | 50 | 500 |
|  | 3 | 2,5 | 2,333 | 2,25 | 2,2 | 2,1 | 2,067 | 2,02 | 2,002 |

Plus devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.

On dit que la suite converge vers 2.

Notation : .

On lit : la limite de lorsque tend vers  est égale à 2.

Définitions :

- Une **suite convergente** possède des termes qui se rapprochent d’une valeur, appelée limite, lorsque devient de plus en plus grand.

- Une suite qui n’est pas convergente est **divergente**.

Méthode : Conjecturer la limite d’une suite

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0CC-EqOH92c**](https://youtu.be/0CC-EqOH92c)

1) Pour tout entier , on donne : .

Calculer .

La suite semble-t-elle être convergente ou divergente ?

2) Pour tout entier , on donne :.

Calculer des termes de la suite.

La suite semble-t-elle être convergente ou divergente ?

**Correction**

1)

Plus devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.

La suite semble diverger vers et on note : .

2)

Lorsque augmente, les termes de la suite ne semblent pas se rapprocher vers une valeur unique. La suite semble diverger.

Méthode : Déterminer un seuil à l’aide d’un algorithme

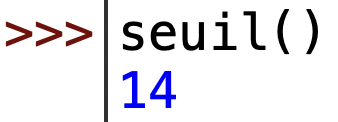
* **Vidéos** [**https://youtu.be/vJmpzwhaka8**](https://youtu.be/vJmpzwhaka8)

Pour tout entier , on donne :

Écrire un programme Python permettant de déterminer le rang de la suite à partir duquel les termes sont supérieurs à 8.

**Correction**

Une image contenant texte

Description générée automatiquement 

Les termes de la suite sont supérieurs à 8 à partir de .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)