SUITES ARITHMÉTIQUES

ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

 **Tout le cours en vidéo :** [**https://youtu.be/05UHsy9G4M4**](https://youtu.be/05UHsy9G4M4)

**Partie 1 : Suites arithmétiques**

1) Définition

Exemple :

Considérons la suite où l’on passe d’un terme au suivant en ajoutant 5.

Si le premier terme est égal à 3, les termes suivants sont :

,

,

,

.

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par :

Définition : Une suite est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre tel que pour tout entier , on a : .

Le nombre est appelé **raison** de la suite.

Remarque :

La raison peut être un nombre négatif. On peut par exemple ajouter

Méthode : Démontrer qu’une suite est arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YCokWYcBBOk**](https://youtu.be/YCokWYcBBOk)

a) La suite définie par : est-elle arithmétique ?

b) La suite définie par : est-elle arithmétique ?

**Correction**

a)

.

La différence entre deux termes successifs reste constante et égale à –9, donc on passe d’un terme au suivant en ajoutant .

est une suite arithmétique de raison –9.

b)

.

La différence entre un terme et son précédent n’est pas constante car elle dépend de .

n'est pas une suite arithmétique.

Propriété : est une suite arithmétique de raison et de premier terme .

Pour tout entier naturel , on a :

**Démonstration au programme :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Jn4\_xM\_ZJD0**](https://youtu.be/Jn4_xM_ZJD0)

La suite arithmétique de raison et de premier terme vérifie la relation

.

En calculant les premiers termes :

…

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient :

Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques :

Méthode : Déterminer une expression en fonction de d’une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6O0KhPMHvBA**](https://youtu.be/6O0KhPMHvBA)

a) Déterminer l’expression, en fonction de de la suite arithmétique définie par :

b) Déterminer l’expression, en fonction de de la suite arithmétique définie par :

**Correction**

a) On a : et

On passe d’un terme au suivant en ajoutant , et donc la raison est égal à et le premier terme est égal à 7.

Ainsi :

b) On a : et

On passe d’un terme au suivant en ajoutant , donc la raison est égale à 3.

Ici, le terme n’est pas donné mais on peut le calculer.

Pour passer de à on retire 3 (« marche arrière ») donc .

Ainsi :

⚠️ À noter : Il peut être pratique d’appliquer directement la formule :

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iEuoMgBblz4**](https://youtu.be/iEuoMgBblz4)

Considérons la suite arithmétique tel que et .

a) Déterminer la raison et le premier terme de la suite .

b) Exprimer en fonction de .

**Correction**

a) Les termes de la suite sont de la forme

Ainsi :

← On soustrait membre à membre

Comme , on a :

.

b)

2) Sens de variation

Propriété : est une suite arithmétique de raison *.*

- Si 0 alors la suite est croissante.

- Si 0 alors la suite est décroissante.

Démonstration : .

- Si 0 alors et la suite est croissante.

- Si 0 alors et la suite est décroissante.

Méthode : Déterminer le sens de variation d’une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/R3sHNwOb02M**](https://youtu.be/R3sHNwOb02M)

Étudier les variations des suites arithmétiques et définies par :

b)

**Correction**

a) est croissante car de raison positive et égale à 5.

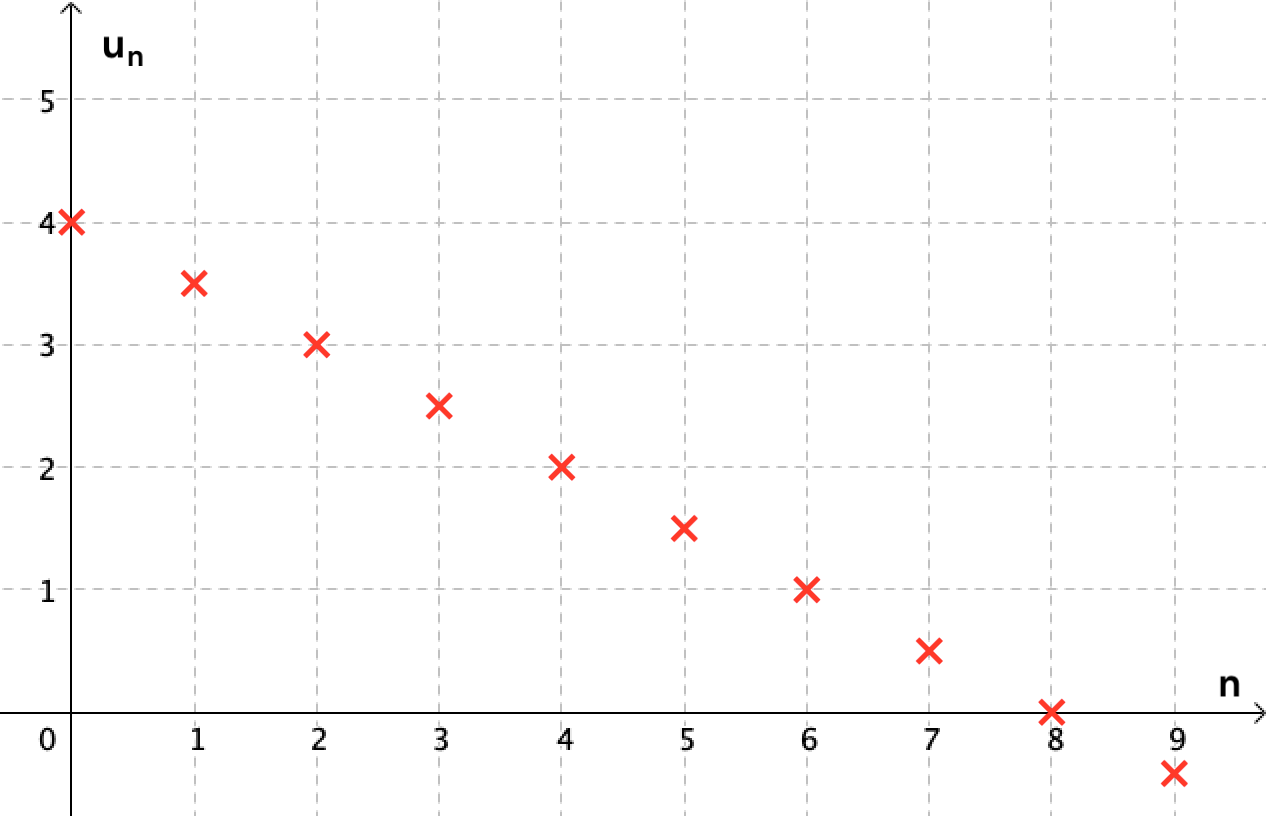
b) On passe d’un terme au suivant en ajoutant . est décroissante car de raison négative et égale à .

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **RÉSUMÉ** | une suite arithmétique   * de raison * de premier terme . | Exemple :  et |
| Définition |  | La différence entre un terme et son précédent est égale à . |
| Propriété |  |  |
| Sens  De variation | Si 0 : est croissante.  Si 0 : est décroissante. | La suite est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque :  Les points de la représentation graphique sont alignés.  La croissance est linéaire. |  |

**Partie 2 : Suites géométriques**

1) Définition

Exemple :

Considérons la suite où l’on passe d’un terme au suivant en multipliant par 2.

Si le premier terme est égal à 5, les termes suivants sont :

,

,

,

.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par :

Définition : Une suite est une **suite géométrique** s'il existe un nombre réel tel que pour tout entier , on a : .

Le nombre est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer qu’une suite est géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ**](https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ)

La suite définie par : est-elle géométrique ?

**Correction**

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5, donc on passe d’un terme au suivant en multipliant par 5.

est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme .

Exemple concret :

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 %.

Chaque année, le capital est donc multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :

De manière générale : avec

Propriété : est une suite géométrique de raison et de premier terme .

Pour tout entier naturel , on a : .

**Démonstration au programme :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OpLU8Ci1GnE**](https://youtu.be/OpLU8Ci1GnE)

La suite géométrique de raison et de premier terme vérifie la relation

.

- Si ou est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.

- Dans la suite, on suppose donc que et sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :

…

En multipliant membre à membre ces *n* égalités, on obtient :

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques, on obtient :

Méthode : Déterminer une expression en fonction de d’une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WTmdtbQpa0c**](https://youtu.be/WTmdtbQpa0c)

a) Déterminer l’expression en fonction de de la suite géométrique définie par :

b) Déterminer l’expression en fonction de de la suite géométrique définie par :

**Correction**

a) On a : et

On passe d’un terme au suivant en multipliant par 4, donc la raison est égal à et le premier terme est égal à 3.

Ainsi :

b) On a : et

On passe d’un terme au suivant en multipliant par 2 donc la raison est égal à 2.

Ici, le terme n’est pas donné mais on peut le calculer.

Pour passer de à on divise par 2 (« marche arrière ») donc :

La raison est égal à et le premier terme est égal à 2,5.

Ainsi :

⚠️ À noter : Il peut être pratique d’appliquer directement la formule :

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wUfleWpRr10**](https://youtu.be/wUfleWpRr10)

Considérons la suite géométrique tel que et .

a) Déterminer la raison et le premier terme de la suite .

b) En déduire une expression de la suite en fonction de .

**Correction**

a) Les termes de la suite sont de la forme .

Ainsi :

= ← On effectue le quotient membre à membre

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.

Ainsi

Comme , on a :

.

Et donc :

2) Sens de variation

Propriété : est une suite géométrique de raison et de premier terme non nul *.*

Pour :

- Si alors la suite est croissante.

- Si alors la suite est décroissante.

Pour :

- Si alors la suite est décroissante.

- Si alors la suite est croissante.

Démonstration dans le cas où :

.

- Si alors et la suite est croissante.

- Si alors et la suite est décroissante.

Remarques :

* Si , la suite est constante.
* Si *,* la suite n'est pas monotone.

Méthode : Déterminer le sens de variation d’une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/vLshnJqW-64**](https://youtu.be/vLshnJqW-64)

Déterminer le sens de variation des suites géométriques et définies par :

a) b)

**Correction**

a) La suite géométrique définie par est décroissante car :

donc

et donc

b) La suite géométrique définie par et est croissante car :

donc

et donc .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **RÉSUMÉ** | une suite géométrique   * de raison * de premier terme . | **Exemple :**  et |
| Définition |  | Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2. |
| Propriété |  |  |
| Sens  de variation | Pour :  Si  : est croissante.  Si  : est décroissante.  Pour :  Si  : est décroissante.  Si  : est croissante. | La suite est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarques :  Si  : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.  La croissance est exponentielle. |  |

**Partie 3 : Sommes de termes consécutifs**

1) Cas des suites arithmétiques

Propriété : est un entier naturel non nul, alors on a :

Remarque : Il s'agit de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-G3FWv5Bkzk**](https://youtu.be/-G3FWv5Bkzk)

1 + 2 + 3 + … + +

+ + + + … + 2 + 1

+ + + … + +

Donc :

Et donc : .

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs**](https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iSfevWwk8e4**](https://youtu.be/iSfevWwk8e4)

Calculer les sommes suivantes :

**Correction**

← dans la formule

●



Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d’un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d’effectuer des additions, plus exactement d’effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d’une série arithmétique.

2) Cas des suites géométriques

Propriété : est un entier naturel non nul et un réel différent de 1 alors on a :

Remarque : Il s'agit de la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7msY7aEe084**](https://youtu.be/7msY7aEe084)

Ainsi :

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

**Vidéo** [**https://youtu.be/eSDrE1phUXY**](https://youtu.be/eSDrE1phUXY)



 **Vidéo** [**https://youtu.be/gUkOjvAiZGA**](https://youtu.be/gUkOjvAiZGA)

Calculer les sommes suivantes :

**Correction**

← et dans la formule

●

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique (problème)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XcszOqP9sbk**](https://youtu.be/XcszOqP9sbk)

Un entrepreneur investit au départ 20 000 €. Puis, chaque mois, il investit un montant supplémentaire diminuée de 30 % par rapport au mois précédent.

On note le montant investi au mois . On considère alors que .

Calculer le montant total investi la première année (12 mois).

**Correction**

Diminuer un nombre de 30 % revient à le multiplier par .

La suite est donc définie, pour tout entier , par : et .

est donc une suite géométrique de premier terme et de raison .

Et on a : .

Le montant total investi la première année est égal à :

Le montant total investi la première année est environ égal à 65 744 €.

3) Algorithme de somme

Méthode : Appliquer l’algorithme de somme

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_3bwycUCtmg**](https://youtu.be/_3bwycUCtmg)

Pour tout entier , on donne :

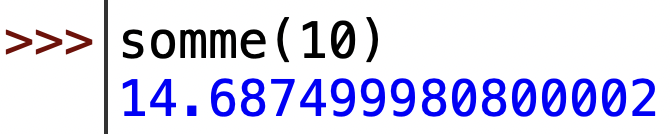
Calculer à l’aide d’un programme la somme

**Correction**

La suite n’est ni arithmétique, ni géométrique. Il n’est donc pas possible d’utiliser les formules vues plus haut pour calculer la somme des termes successifs.

Pour cela, on va utiliser un programme Python.

Une image contenant texte

Description générée automatiquement 

On trouve :



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)