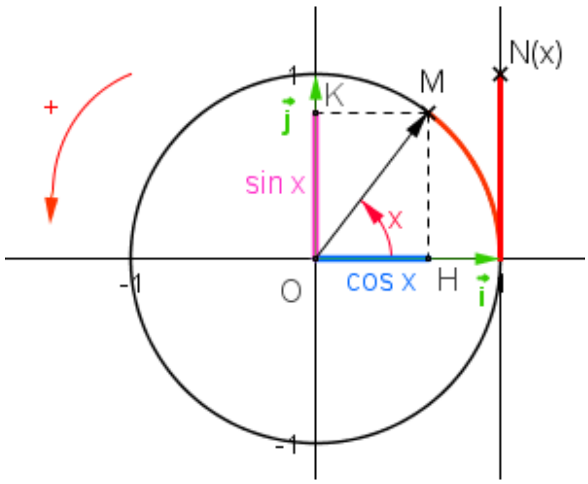
TRIGONOMÉTRIE (Partie 2)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/wJjb3CSS3cg

I. Cosinus et sinus d'un angle

1) Définitions :



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

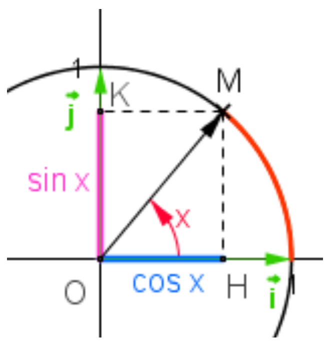
Définitions :
- Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos** x.
- Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin** x.

2) Propriétés :

Propriétés :
1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$
2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
3) $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$
4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif
5) $\sin x = \sin\,(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

Remarque : $(\sin x)^2$, par exemple, se note $\sin^2 x$.

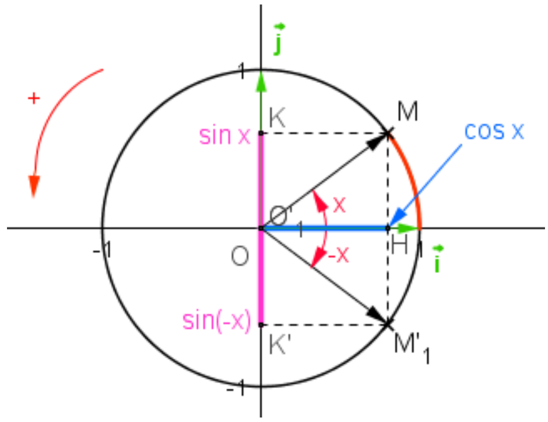
Démonstrations :



1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.

2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
$\cos^2 x + \sin^2 x = OM^2 = 1$.

3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.



4) 5) Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

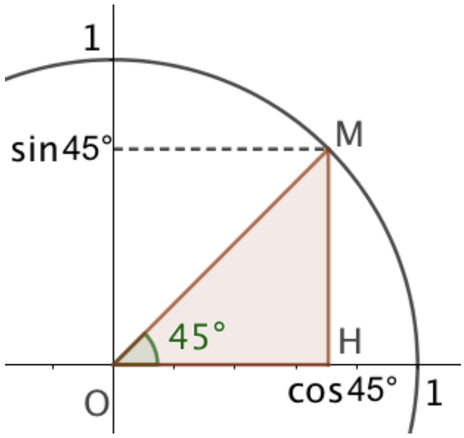
3) Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstrations au programme :

Vidéo https://youtu.be/b2-EQupZUp8

- Démontrons que : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



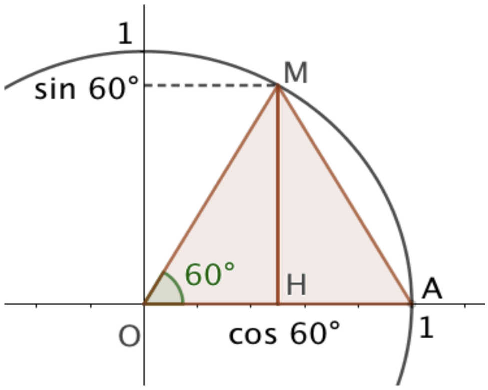
La mesure $\frac{\pi}{4}$ radian est à égale à la mesure 45°.
Le triangle OHM est rectangle est isocèle en H, en effet l'angle $\widehat{OMH}$ est égal à :
180 – 90 – 45 = 45°.
Donc HO = HM et donc : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
Soit :
$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Démontrons que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

.

Vidéo https://youtu.be/4R1i5Vj72Ls

La mesure $\frac{\pi}{3}$ radian est à égale à la mesure 60°.
Le triangle OMA est isocèle en O, en effet OA = OM.
Donc les angles $\widehat{OMA}$ et $\widehat{MAO}$ sont égaux à :
(180 – 60) : 2 = 60°.
Le triangle OMA est donc équilatéral.
Ainsi, la hauteur (MH) est également une médiane du triangle. Elle coupe donc [OA] en son milieu.
On a donc : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$
Soit :



$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lire sur le cercle trigonométrique :

Vidéo https://youtu.be/ECNX9hnhG9U

Vidéo https://youtu.be/m6tuif8ZpFY

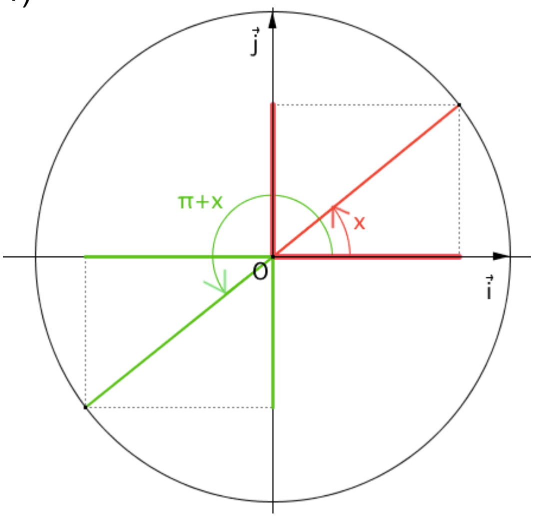
4) Cosinus et sinus d'angles associés

Propriétés :
Pour tout nombre réel x, on a :
1) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
2) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

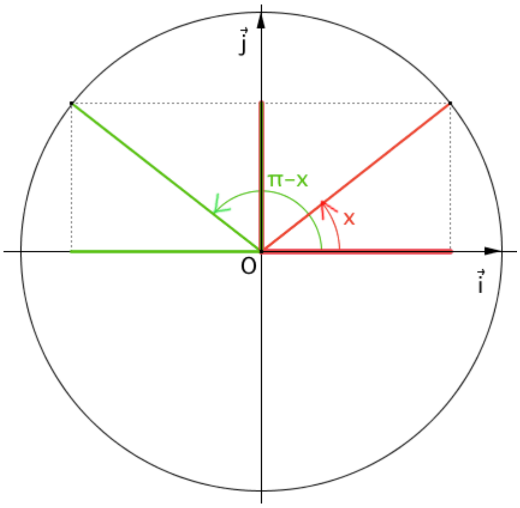
Démonstrations :

Par symétries, on démontre les résultats :

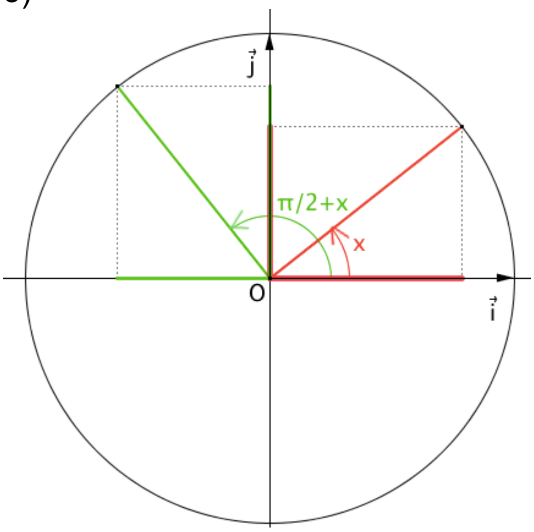
1)



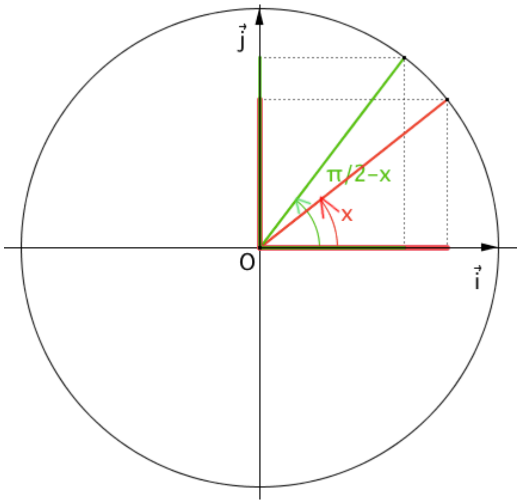
2)



3)



4)

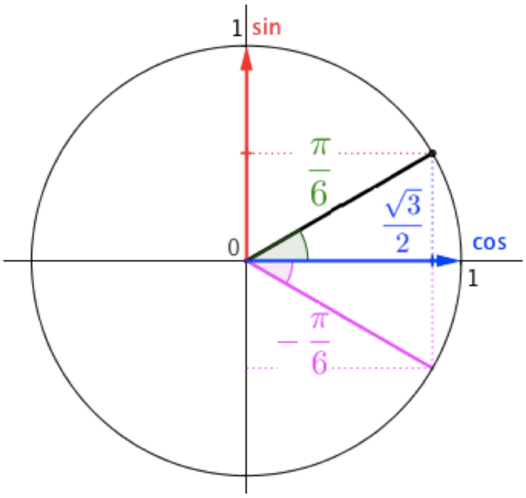


Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/NlV2zKJtvc8

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$



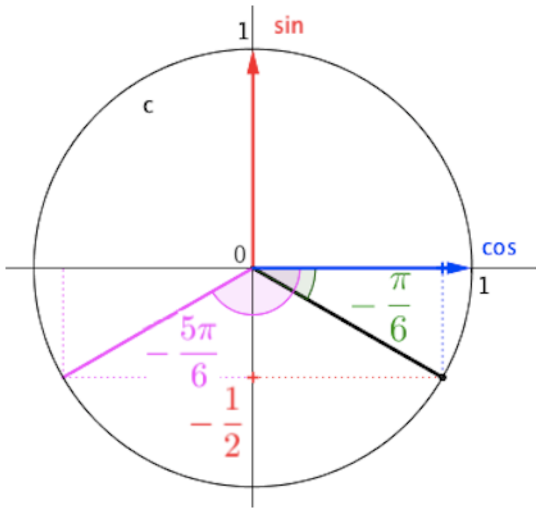
a) L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

où k est un entier relatif.

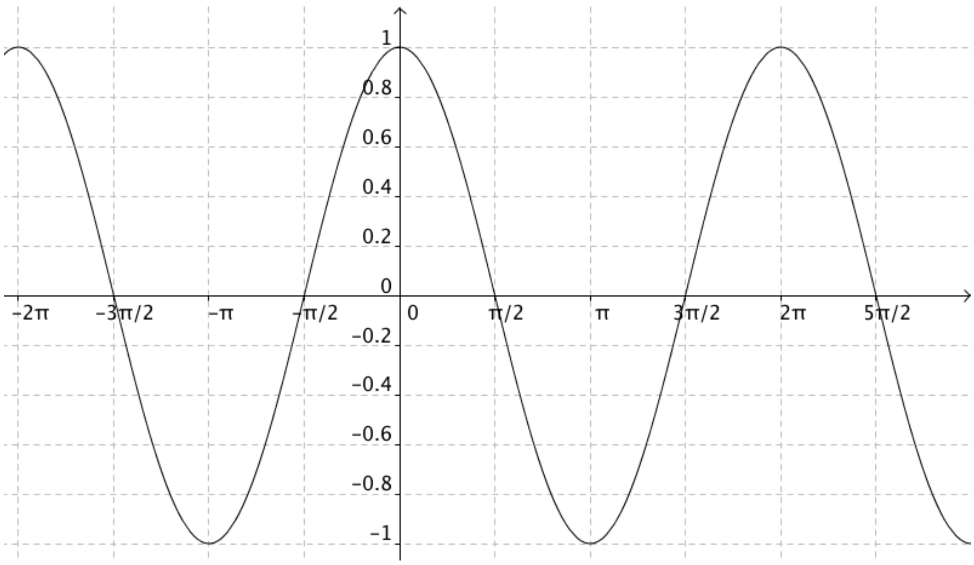
b) L'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ a pour solution :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$
où k est un entier relatif.

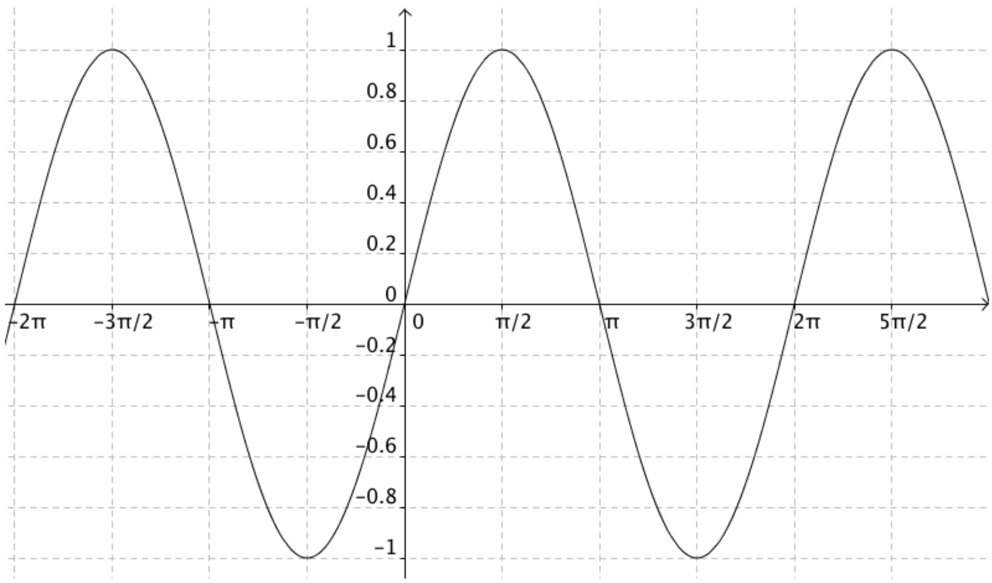


II. Fonctions cosinus et sinus

1) Représentations graphiques



Fonction cosinus



Fonction sinus

2) Périodicité

On a vu que : 1) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif
2) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

Remarque :
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

Conséquence :
Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

3) Parité

On a vu que : 1) $\sin(-x) = -\sin x$ 2) $\cos(-x) = \cos x$

Remarque :
On dit que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

Conséquences :

Vidéo https://youtu.be/RV3Bi06nQOs

- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Méthode : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/hrbgxnCZW_I

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - \sin(2x)$ est impaire.

Pour tout x réel, on a :
$f(-x) = \sin(-x) - \sin(-2x) = -\sin x + \sin(2x) = -(\sin x - \sin(2x)) = -f(x)$.
La fonction f est donc impaire.
Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

4) Variations des fonctions cosinus et sinus

x	0		π
$\cos x$	1	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0