# NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 1/2

## Partie 1 : L'ensemble $\mathbb{C}$

### 1) Définition

Définition : Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre *i* tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément *z* de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec *a* et *b* réels.

Vocabulaire :
- L'écriture $a + ib$ d'un nombre complexe *z* est appelée la **forme algébrique** de *z*.
- Le nombre *a* s'appelle la **partie réelle** et la nombre *b* s'appelle la **partie imaginaire**.

Exemples :
Les nombres suivants sont des nombres complexes :
- $3 + 4i$ : 3 est la partie réelle et 4 est la partie imaginaire
- $-2 - i$ : –2 est la partie réelle et –1 est la partie imaginaire
- $\frac{i}{3}$ : 0 est la partie réelle et $\frac{1}{3}$ est la partie imaginaire.

Remarques :
- Si $b = 0$ alors *z* est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors *z* est un nombre imaginaire pur.

Méthode : Effectuer des calculs sur les nombres complexes

**Vidéo** https://youtu.be/-aaSfL2fhTY
**Vidéo** https://youtu.be/rva2e2UN3nM

Calculer et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$ $\quad z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$ $\quad z_3 = (2 - 3i)^2$ $\quad z_4 = \frac{1+i}{2-i}$

**Correction**

$$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4) = 3 - 5i - 3i + 4 = 7 - 8i$$

$$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i) = -3 + 15i + 2i - 10i^2 = -3 + 15i + 2i + 10, \text{ car } i^2 = -1 = 7 + 17i$$

$$z_3 = (2 - 3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$$

$$
\begin{aligned}
z_4 &= \frac{1+i}{2-i} \\
&= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\
&= \frac{2+i+2i+i^2}{2^2-i^2} \\
&= \frac{2+i+2i-1}{2^2+1} \\
&= \frac{1+3i}{5} \\
&= \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i
\end{aligned}
$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée de $2-i$, soit : $2+i$.

Dans la suite du chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

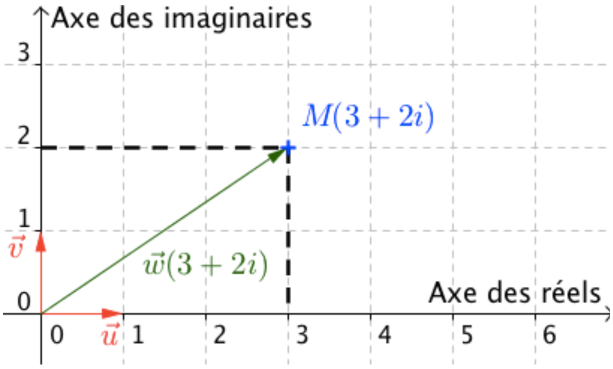
## 2) Représentation dans le plan complexe

Définition : A tout point $M(a\,;b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a\,;b)$, on associe le nombre complexe $z=a+ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.
On note M($z$) et $\vec{w}(z)$.

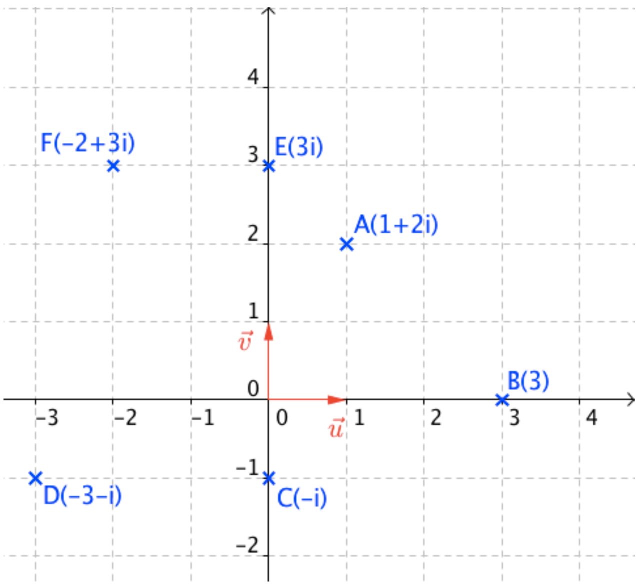
Exemple :

Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE

Le point M(3 ; 2) a pour affixe le nombre complexe $z=3+2i$.
De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z'=3+2i$.




Autres exemples :



Méthode : Utiliser l'affixe d'un point en géométrie

**Vidéo** https://youtu.be/m9yM6kw1ZzU

On considère les points $A(-2+3i)$, $B(2+4i)$, $C(5+3i)$, $D(1+2i)$ et $E(-7)$.
a) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Calculer l'affixe de son centre.
b) Les points $D$, $C$ et $E$ sont-ils alignés ?

**Correction**

a) - On va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.
Affixe de $\overrightarrow{AB}$ : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2+4i-(-2+3i) = 4+i$
Affixe de $\overrightarrow{DC}$ : $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 5+3i-(1+2i) = 4+i$
Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

- Le centre du parallélogramme est le milieu $I$ du segment $[AC]$. Son affixe est :
$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2+3i+5+3i}{2} = \frac{3+6i}{2} = \frac{3}{2} + 3i$$

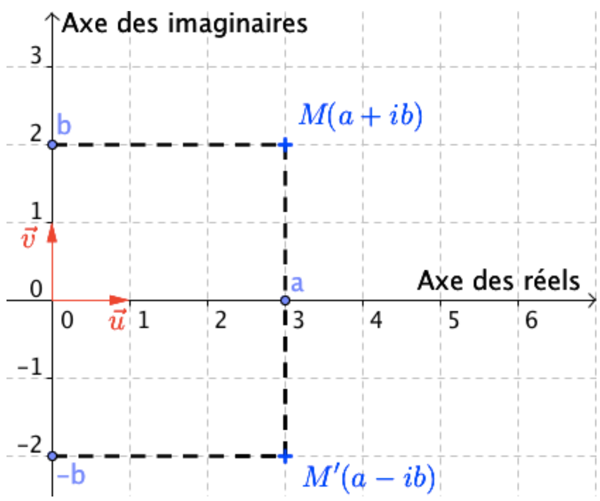
b) On ca démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
Affixe de $\overrightarrow{DC}$ : $z_{\overrightarrow{DC}} = 4+i$
Affixe de $\overrightarrow{DE}$ : $z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = -7-(1+2i) = -8-2i$.
Donc : $z_{\overrightarrow{DE}} = -2\, z_{\overrightarrow{DC}}$ et donc $\overrightarrow{DE} = -2\,\overrightarrow{DC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et donc les points $D$, $C$ et $E$ sont alignés.

## Partie 2 : Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$ .
On appelle **nombre complexe conjugué** de $z$, le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $a - ib$ .

Exemples :
- $z = 4+5i$ et $\bar{z} = 4-5i$
- On peut également noter :
$\overline{7-3i} = 7+3i$ ; $\bar{i} = -i$ ; $\bar{5} = 5$

Remarque :
Les points d'affixes $z$ et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Propriétés :

a) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ b) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ c) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ avec $z' \neq 0$

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration : $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Méthode : Déterminer un conjugué

Vidéo https://youtu.be/WhKHo9YwafE

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = (2-i)(i-5)$ $z_2 = \frac{3+2i}{i}$

**Correction**

$$\begin{aligned}
\bar{z_1} &= \overline{(2-i)(i-5)} \\
&= \overline{(2-i)}\ \overline{(i-5)} \\
&= (2+i)(-i-5) \\
&= -2i - 10 + 1 - 5i \\
&= -9 - 7i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{z_2} &= \overline{\left(\frac{3+2i}{i}\right)} \\
&= \frac{\overline{3+2i}}{\bar{i}} \\
&= \frac{3-2i}{-i} \\
&= \frac{(3-2i)i}{-i \times i} \\
&= \frac{3i - 2i^2}{1} \\
&= 2 + 3i
\end{aligned}$$