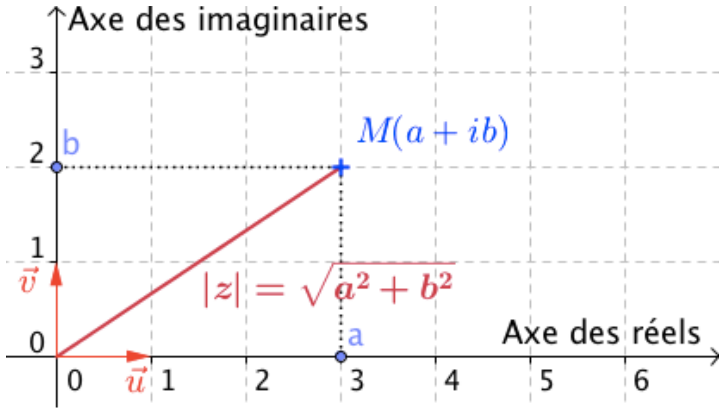
NOMBRES COMPLEXES
(Partie 2)

I. Module d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z.
Alors le module de z est égal à la distance OM.



Propriétés : a) $|zz'| = |z|\,|z'|$ b) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Méthode : Calculer le module d'un nombre complexe

Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4

Calculer : a) $|3 - 2i|$ b) $|-3i|$ c) $\left|\overline{\sqrt{2} - i}\right|$

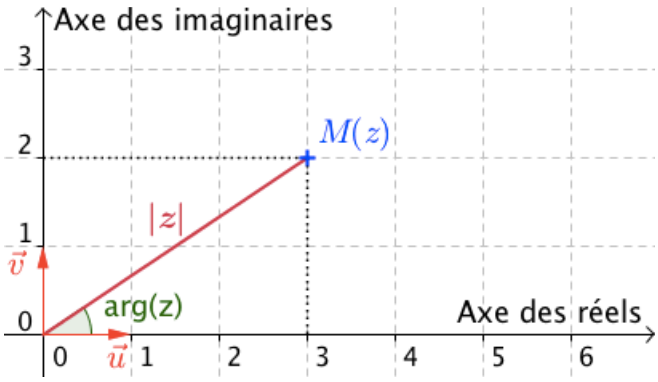
a) $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

b) $|-3i| = |-3| \times |i| = 3 \times 1 = 3$

c) $\left|\overline{\sqrt{2} - i}\right| = |\sqrt{2} - i| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$

II. Argument d'un nombre complexe

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

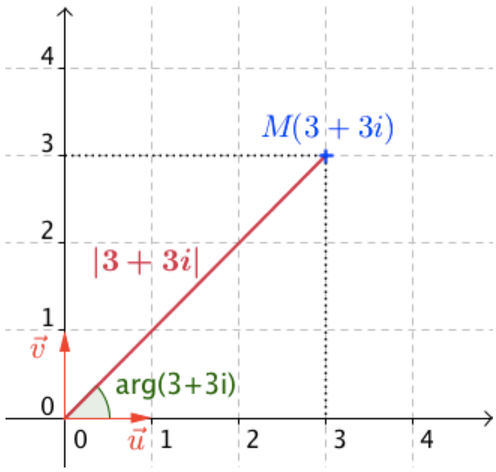


Remarques :
- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On note : $\arg(z)\ [2\pi]$
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.

Exemple :

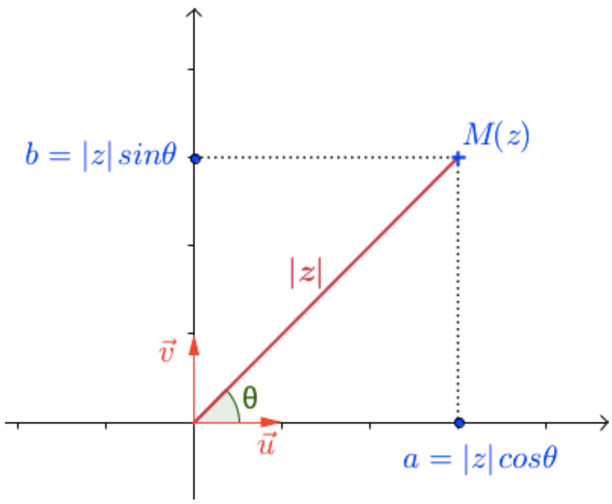
Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4

Soit $z = 3 + 3i$.
Alors $|z| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ et
$\arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$



III. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta = \arg(z)$.



Méthode : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique

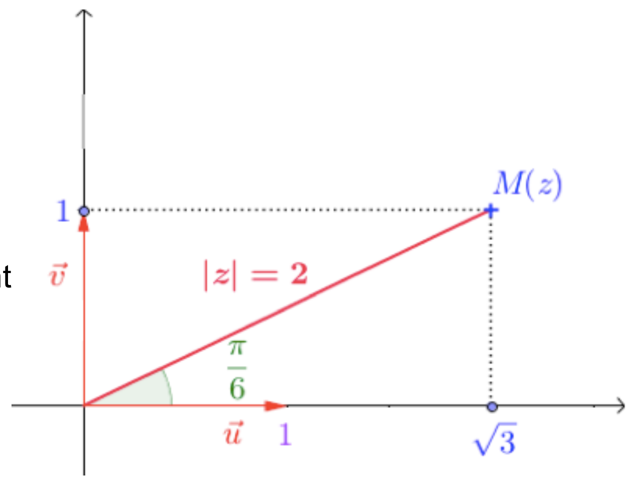
Écrire le nombre complexe $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ sous sa forme algébrique.

$$\begin{aligned} z &= 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3(0 + i \times 1) \\ &= 3i \end{aligned}$$

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/zlbpXlgISc4

Écrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.



- On commence par calculer le module de z :

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

- En calculant $\frac{z}{|z|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et sa partie imaginaire :

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z tel que : $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$.

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{z}{|z|} = \frac{z}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Donc :

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \; avec \; \arg(z) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$$