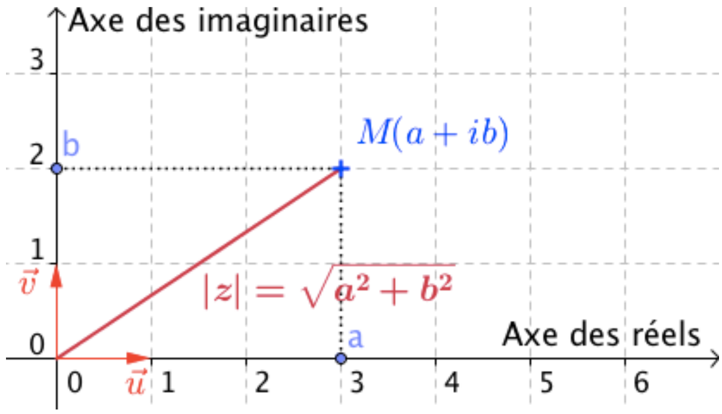
NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 2/2

Partie 1 : Module d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z.
Alors le module de z est égal à la distance OM.



Propriétés : a) $|zz'| = |z|\,|z'|$ b) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ c) $|z^2| = |z|^2$

Méthode : Calculer le module d'un nombre complexe

Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4
Vidéo https://youtu.be/i85d2fKv34w

Calculer : a) $|3 - 2i|$ b) $|\overline{-3i}|$ c) $|\sqrt{2} + i|$ d) $\left|\frac{-3i}{(\sqrt{2}+i)^2}\right|$

Correction

a) $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

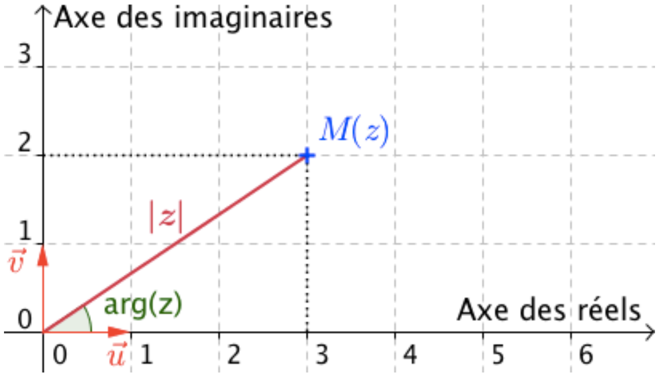
b) $|\overline{-3i}| = |-3i| = |-3||i| = 3 \times 1 = 3$

c) $|\sqrt{2} + i| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

d) $\left|\frac{-3i}{(\sqrt{2}+i)^2}\right| = \frac{|-3i|}{\left|(\sqrt{2}+i)^2\right|} = \frac{|-3i|}{|\sqrt{2}+i|^2} = \frac{3}{\sqrt{3}^2} = 1$

Partie 2 : Argument d'un nombre complexe

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle **argument** de z, noté arg(z) une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

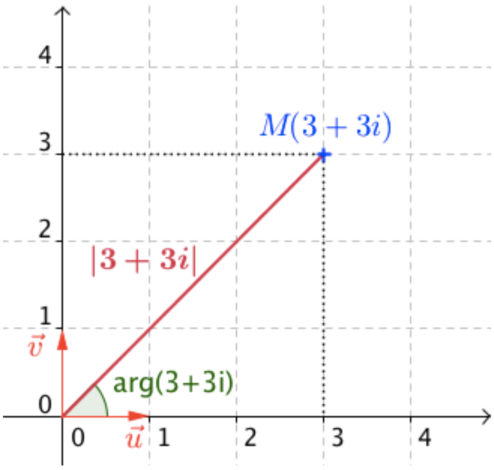


Remarques :
- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On note : $\arg(z)\ [2\pi]$
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $\left(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas défini.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4

Soit $z = 3 + 3i$.
Alors $|z| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ et
$\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$



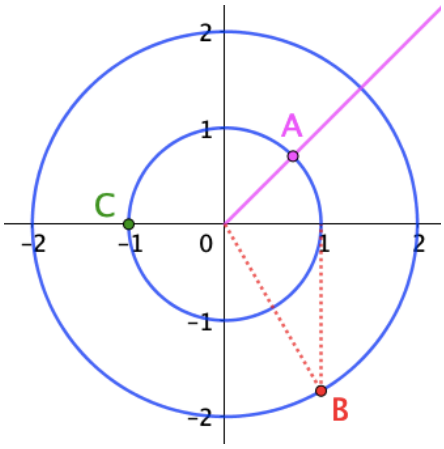
Méthode : Déterminer géométriquement un argument

Vidéo https://youtu.be/NX3pzPL2gwc

a) Déterminer un argument de chaque affixe des points A, B et C.
b) Placer les points D et E d'affixes respectives z_D et z_E telles que :

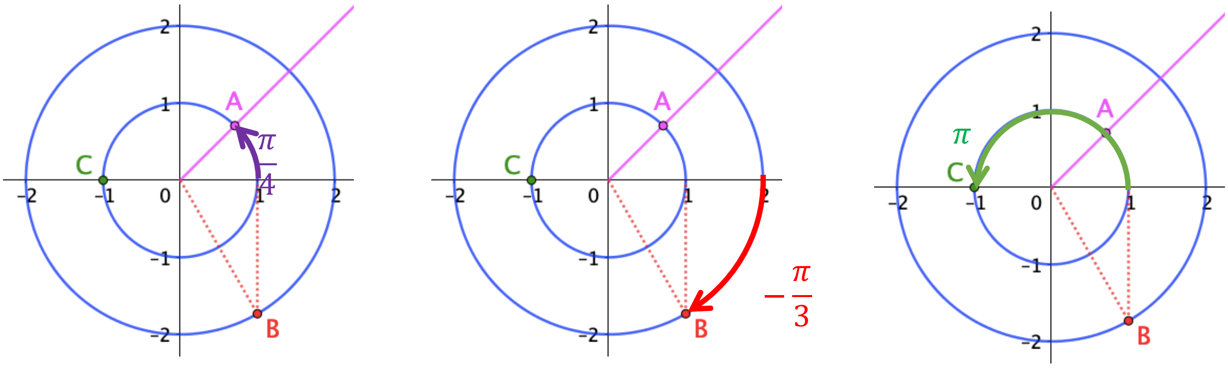
$$|z_D| = 2 \text{ et } \arg(z_D) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

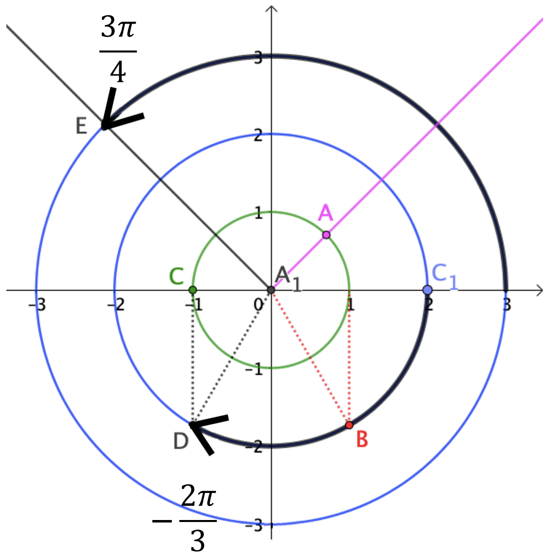
$$|z_E| = 3 \text{ et } \arg(z_E) = \frac{3\pi}{4}[2\pi].$$



Correction

a) $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\qquad \arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ $\qquad \arg(z_C) = \pi[2\pi]$

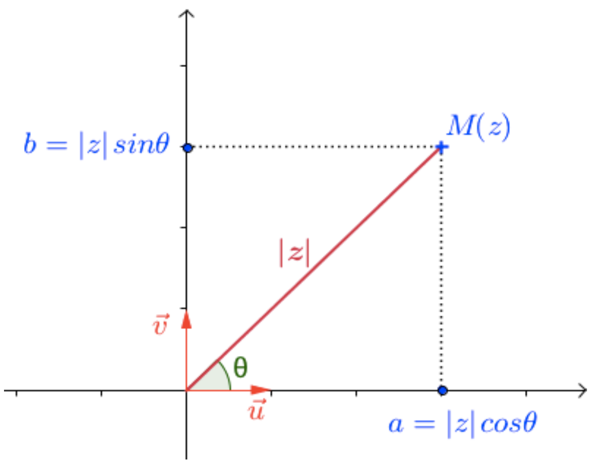




b) Le point D appartient au cercle de rayon 2 car $|z_D| = 2$.
Le point E appartient au cercle de rayon 3 car $|z_E| = 3$.

Partie 3 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe *z* non nul l'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta = \arg(z)$.



Méthode : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique

Vidéo https://youtu.be/kmb3-hNiBq8

Écrire le nombre complexe $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ sous sa forme algébrique.

Correction

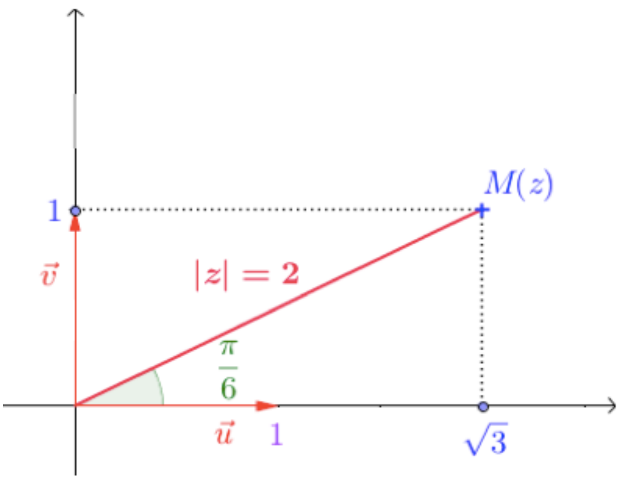
$$\begin{aligned} z &= 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3(0 + i \times 1) \\ &= 3i \end{aligned}$$

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/zIbpXlgISc4
Vidéo https://youtu.be/RqRQ2m-9Uhw

Écrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

Correction



- On commence par calculer le module de z :

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

- En calculant $\frac{z}{|z|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et sa partie imaginaire :

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z tel que : $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$.

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{z}{|z|} = \frac{z}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Donc :

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \; avec \; \arg(z) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$$