

PRIMITIVES

Partie 1 : Primitive d'une fonction

1) Définition

Exemple :

On considère les fonctions f et F définies par : $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x - 1$

Si on dérive F , on constate que : $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.

Lorsque $F' = f$, on dit que F est une primitive de f .

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I .
On appelle **primitive** de f , une fonction F , telle que : $F' = f$.

Remarque :

Dans ces conditions, dire que « F est une primitive de f » revient à dire que « f est la dérivée de F ».

Méthode : Démontrer qu'une fonction est une primitive d'une autre

 **Vidéo** <https://youtu.be/TIo24OoLKio>

Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + 1$.

Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ est une primitive de f .

Correction

On dérive la fonction F :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2 \times \frac{1}{2}x + 1 + 0. \\ &= x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

Donc : $F' = f$

Et donc F est une primitive de f .

2) Propriété

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I .
Si F est une primitive de f alors pour tout réel C , la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f .

Démonstration :

F est une primitive de f .

On pose $G(x) = F(x) + C$.

$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.

Donc G est une primitive de f .

Exemple : En reprenant la méthode précédente, la fonction définie par $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 10$ est également une primitive de f .

Méthode : Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition

 **Vidéo** <https://youtu.be/CVJNgZPczks>

Soit une fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x - 3$.

a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x^2 - 3x$ est une primitive de f .

b) Déterminer la fonction G primitive de f telle que $G(2) = 1$.

Correction

a) $F'(x) = 2x - 3 = f(x)$ donc F est une primitive de f .

b) G est une primitive de f donc G est de la forme $G(x) = x^2 - 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Comme $G(2) = 1$, on a :

$$2^2 - 3 \times 2 + C = 1$$

$$-2 + C = 1$$

$$C = 1 + 2 = 3$$

D'où $G(x) = x^2 - 3x + 3$.

Partie 2 : Calculs de primitive

1) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$
$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$

2) Linéarité des primitives

Propriété : Si F est une primitive de f et G est une primitive de g , alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,

- kF est une primitive de kf avec k réel.

Méthode : Recherche de primitives

 **Vidéo** <https://youtu.be/Stum4aydtRE>

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^4 & \text{b) } f(x) = 4x^3 & \text{c) } f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \\ \text{d) } f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6 & \text{e) } f(t) = 5 \cos(2t - \pi) & \text{f) } f(t) = -3 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

Correction

$$\text{a) } f(x) = x^4 \text{ donc } F(x) = \frac{1}{4+1} x^{4+1} = \frac{1}{5} x^5$$

$$\text{b) } f(x) = 4x^3 \text{ donc } F(x) = 4 \frac{1}{3+1} x^{3+1} = 4 \frac{1}{4} x^4 = x^4$$

$$\text{c) } f(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \text{ donc } F(x) = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + 2 \frac{1}{2+1} x^{2+1} + 1x = \frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + 1$$

$$\text{d) } f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6 \text{ donc :}$$

$$F(x) = 5 \frac{1}{4} x^4 - 2 \frac{1}{3} x^3 + 2 \frac{1}{2} x^2 - 6x = \frac{5}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + x^2 - 6x$$

$$\text{e) } f(t) = 5 \cos(2t - \pi) \text{ donc } F(t) = \frac{5}{2} \sin(2t + \pi) \text{ car } \cos \rightarrow \sin$$

$$\text{f) } f(t) = -3 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ donc } F(t) = -\frac{-3}{5} \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ car } \sin \rightarrow -\cos$$

$$\text{et donc } F(t) = \frac{3}{5} \cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) .$$

Partie 3 : Méthode d'Euler

Méthode : Calcul approché d'une primitive par la méthode d'Euler

 Vidéo https://youtu.be/5Jj6b4AV_Ao

Soit f la fonction définie sur $[1 ; 5]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

A l'aide de la méthode d'Euler et en prenant un pas de 0,5, déterminer une approximation de la primitive F de la fonction f sur $[1 ; 5]$ tel que : $F(1) = 0$.

Correction

On utilise l'approximation suivante, nous donnant de proche en proche des valeurs de F :

$$\text{Méthode d'Euler : } F(x_{i+1}) \approx F(x_i) + hf(x_i)$$

Le pas est de 0,5 donc $h = 0,5$.

Les valeurs successives x_i sont donc : 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5.

- On sait que : $F(1) = 0$.

- La méthode d'Euler, nous permet d'écrire : $F(1,5) \approx F(1) + hf(1)$

Soit : $F(1,5) \approx 0 + 0,5 \times \frac{1}{1} = 0,5$

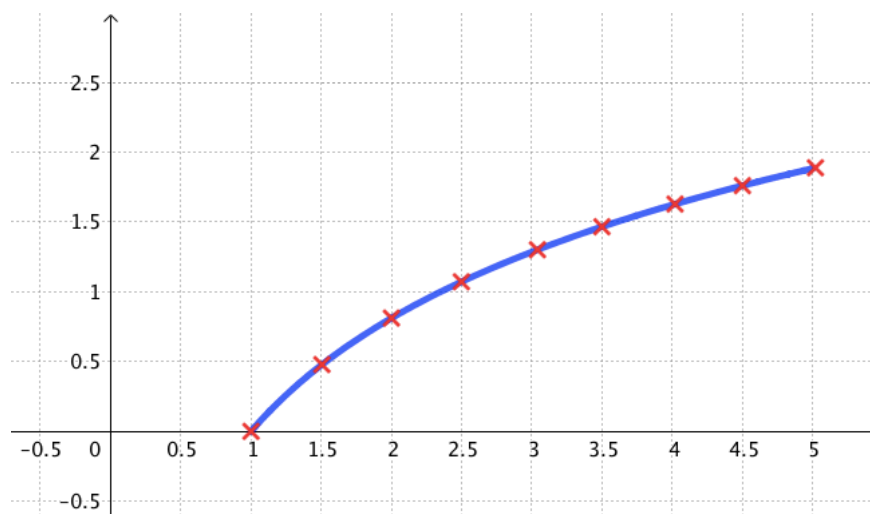
- On poursuit : $F(2) \approx F(1,5) + hf(1,5)$

Soit : $F(2) \approx 0,5 + 0,5 \times \frac{1}{1,5} = 0,833.$

- Et on poursuit ainsi de proche en proche en complétant le tableau suivant :

x_i	$f(x_i)$
1	0
1,5	0,5
2	0,83
2,5	1,08
3	1,28
3,5	1,45
4	1,59
4,5	1,72
5	1,83

Représentons alors point par point une approximation de F sur $[1 ; 5]$:



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales