PRIMITIVES

I. Primitive d'une fonction

1) Définition

Exemple :
On considère les fonctions suivantes :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x + 3$ $\quad$ $x \longmapsto x^2 + 3x - 1$
On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F telle que $F' = f$.

Remarque :
Dans ces conditions, on a l'équivalence :
"F a pour dérivée f" et "f a pour primitive F".

Méthode : Démontrer qu'une fonction est une primitive d'une autre
Vidéo https://youtu.be/TIo24OoLKio

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$.
Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ est une primitive de f.

On dérive la fonction F :

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \times \frac{1}{2}x + 1 + 0. \\ &= x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

Donc : $F' = f$
Et donc F est une primitive de f.

2) Propriété

Propriété : f est une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I.

Démonstration :
F est une primitive de f.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.

Donc G est une primitive de f.

Exemple : En reprenant la méthode précédente, la fonction définie par
$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 10$ est également une primitive de f.

Méthode : Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant une condition

Vidéo https://youtu.be/CVJNgZPczks

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.
1) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x^2 - 3x$ est une primitive de f.
2) Déterminer la fonction G primitive de f telle que $G(2) = 1$.

1) $F'(x) = 2x - 3 = f(x)$ donc F est une primitive de f.

2) G est une primitive de f donc G est de la forme $G(x) = x^2 - 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Comme $G(2) = 1$, on a :
$2^2 - 3 \times 2 + C = 1$
$-2 + C = 1$
$C = 1 + 2 = 3$

D'où $G(x) = x^2 - 3x + 3$.

II. Calculs de primitive

1) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitive
$f(x) = a, \ \ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n, \ \ n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$
$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$

2) Linéarité des primitives

Propriété :
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g, alors :
- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Méthode : Recherche de primitives

Vidéo https://youtu.be/Stum4aydtRE

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = 4x^3$ c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ e) $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$ f) $f(t) = -3\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

a) $f(x) = x^4$ donc $F(x) = \frac{1}{4+1}x^{4+1} = \frac{1}{5}x^5$

b) $f(x) = 4x^3$ donc $F(x) = 4\frac{1}{3+1}x^{3+1} = 4\frac{1}{4}x^4 = x^4$

c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ donc $F(x) = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + 2\frac{1}{2+1}x^{2+1} + 1x = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + 1$

d) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x - 6$ donc :

$F(x) = 5\frac{1}{4}x^4 - 2\frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 6x = \frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 6x$

e) $f(t) = 5\cos(2t - \pi)$ donc $F(t) = \frac{5}{2}\sin(2t + \pi)$ car cos → sin

f) $f(t) = -3\sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ donc $F(t) = -\frac{-3}{5}\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ car sin → -cos

et donc $F(t) = \frac{3}{5}\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$.

III. Méthode d'Euler

Méthode : Calcul approché d'une primitive par la méthode d'Euler

Vidéo https://youtu.be/5Jj6b4AV_Ao

Soit f la fonction définie sur [1 ; 5] par $f(x) = \frac{1}{x}$.

A l'aide de la méthode d'Euler et en prenant un pas de 0,5, déterminer une approximation de la primitive *F* de la fonction f sur [1 ; 5] tel que : *F*(1) = 0.

On utilise l'approximation suivante, nous donnant de proche en proche des valeurs de *F* :

$$\text{Méthode d'Euler : } F(x_{i+1}) \approx F(x_i) + hf(x_i)$$

Le pas est de 0,5 donc h = 0,5.
Les valeurs successives x_i sont donc : 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5.

- On sait que : $F(1) = 0$.

- La méthode d'Euler, nous permet d'écrire : $F(1{,}5) \approx F(1) + hf(1)$

  Soit : $F(1{,}5) \approx 0 + 0{,}5 \times \frac{1}{1} = 0{,}5$
- On poursuit : $F(2) \approx F(1{,}5) + hf(1{,}5)$

  Soit : $F(2) \approx 0{,}5 + 0{,}5 \times \frac{1}{1{,}5} = 0{,}833.$
- Et on poursuit ainsi de proche en proche en complétant le tableau suivant :

x_i	$f(x_i)$
1	0
1,5	0,5
2	0,83
2,5	1,08
3	1,28
3,5	1,45
4	1,59
4,5	1,72
5	1,83

Représentons alors point par point une approximation de F sur [1 ; 5] :