PRODUIT SCALAIRE

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

I. Définition et propriétés

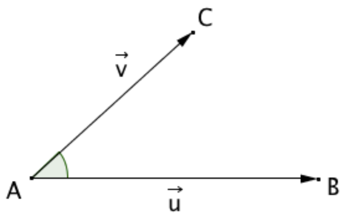
1) Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

2) Définition du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, dans le cas contraire.



$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

Remarque :
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide du cosinus

Vidéo **https://youtu.be/CJxwKG4mvWs**

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.
Calculer, en fonction de a, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$
$= a \times a \times \cos 60°$
$= a^2 \times 0,5$
$= \dfrac{a^2}{2}$

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

3) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Démonstration :
On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos\big(-(\vec{v}\,;\,\vec{u})\big)$
$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times cos(\vec{v}\,;\,\vec{u})$
$= \vec{v}.\vec{u}$

4) Opérations sur les produits scalaires

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
1) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ 2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

II. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

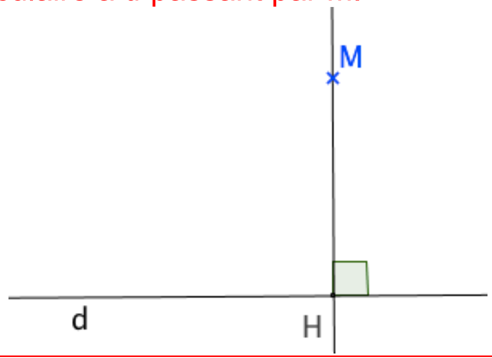
Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.

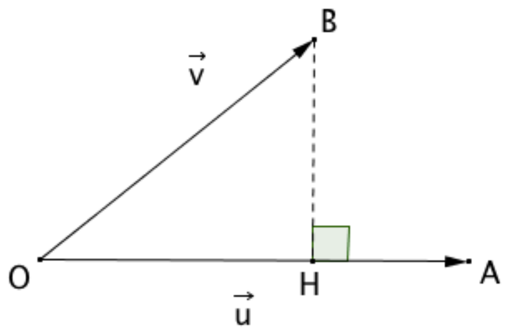
$\vec{u}.\vec{v} = 0$
$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

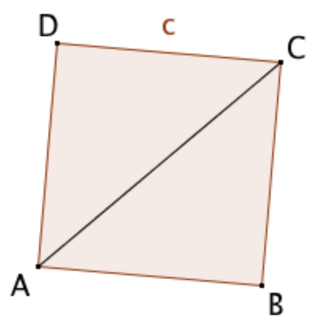


Démonstration :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}\right)$
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}$
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$
En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = 0$.

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

Vidéo https://youtu.be/2eTsaa2vVnI



Soit un carré ABCD de côté *c*.
Calculer, en fonction de *c*, les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

a) Par projection, on a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = c^2$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} = -\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = -c^2$

III. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$.
On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.
et $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées

Vidéo https://youtu.be/aOLRbG0libY

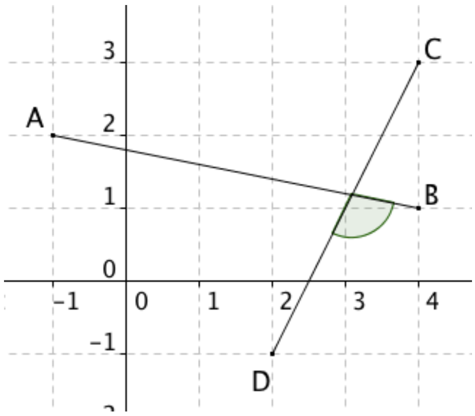
Vidéo https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ

Soit $\vec{u}(5\,;\,-4)$ et $\vec{v}(-3\,;\,7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$

Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

Vidéo https://youtu.be/ca_pW79ik9A



Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right)$ en lisant
Les coordonnées de A, B, C et D ;

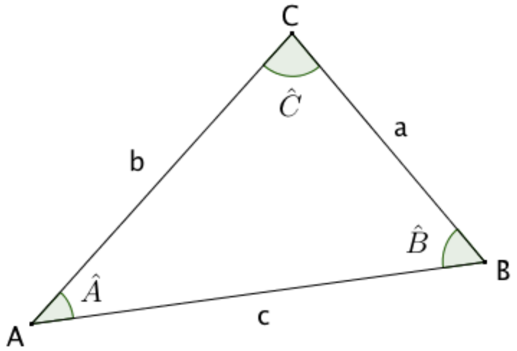
On a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CD}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right)$
$= \sqrt{(4-(-1))^2 + (2-1)^2} \times \sqrt{(4-2)^2 + (3-(-1))^2} \times$
$= \sqrt{520} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right)$
$= 2\sqrt{130} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right)$

On a également : $\overrightarrow{AB}(5\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{CD}(-2\,;\,-4)$, donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ = 5 x (–2) + (–1) x (–4) = –6
On a ainsi : $2\sqrt{130} \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) = -6$
Et donc : $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) = -\dfrac{6}{2\sqrt{130}} = -\dfrac{3}{\sqrt{130}}$
Et : $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) \approx 105{,}3°$.

IV. Théorème d'Al Kashi

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



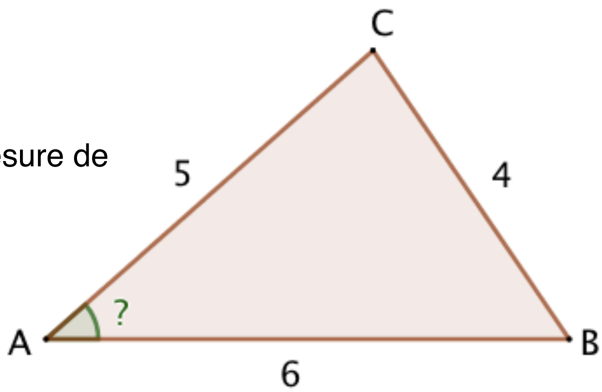
A noter : Si le triangle ABC est rectangle, on retrouve le théorème de Pythagore.

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi (1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.
Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :
$2\pi \approx 6,283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi

Vidéo https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc

On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.



D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos\widehat{BAC}$

$16 = 36 + 25 - 60\cos\widehat{BAC}$

$60\cos\widehat{BAC} = 36 + 25 - 16$

$60\cos\widehat{BAC} = 45$

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{45}{60}$

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{3}{4}$

$\widehat{BAC} \approx 41°$