PRODUIT SCALAIRE

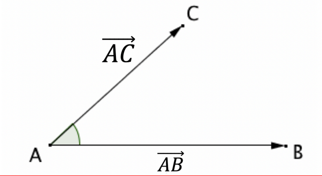
La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

Partie 1 : Définition et propriétés

1) Définitions

Définition : Soit deux points A et B.
La **norme du vecteur** $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB.

Définition : Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs.
On appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, le nombre réel défini par :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\left(\widehat{BAC}\right)$.



Propriété : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

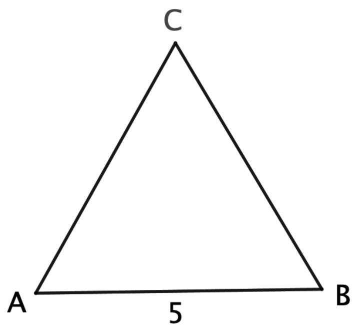
Remarques :
- $\vec{u}.\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».
- Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$,

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide de la formule du cosinus

Vidéo https://youtu.be/dfxz40fK0UI

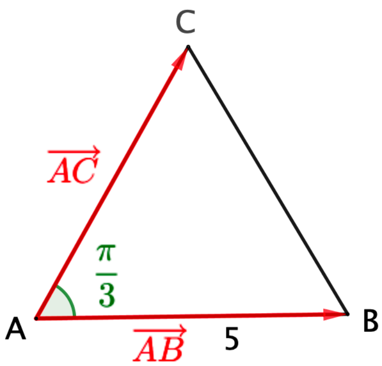
a) Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Soit I le milieu de $[AB]$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$.



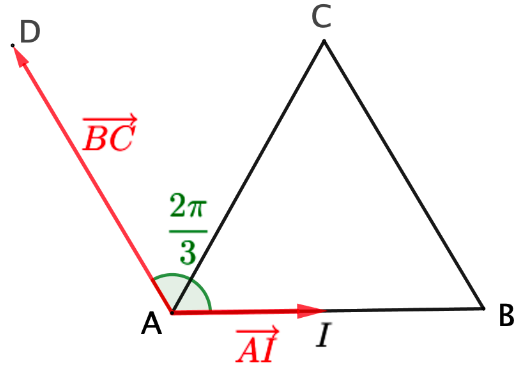
Correction

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$
$= 5 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$= 25 \times 0,5$
$= 12,5$



b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$ est composé de deux vecteurs qui n'ont pas la même origine.
On construit alors un point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
De cette façon, le produit scalaire à calculer est composé de deux vecteurs de même origine le point A (voir figure ci-contre).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD}\\ &= AI \times AD \times \cos(\widehat{IAD})\\ &= 2{,}5 \times 5 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= 12{,}5 \times (-0{,}5)\\ &= -6{,}25\end{aligned}$$



Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2) Propriétés

Propriété de symétrie : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

Propriétés de bilinéarité :
1) $\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$
2) $\vec{u}\,.\,(k\vec{v}) = k\vec{u}\,.\,\vec{v}$, avec k un nombre réel.

Identités remarquables :
1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$ $\longrightarrow$ On peut également noter : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Méthode : Appliquer les propriétés du produit scalaire

Vidéo https://youtu.be/_SDj-fG1S18
Vidéo https://youtu.be/P0nKS-cTEO0

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de normes respectives 2 et 3 et tels que : $\vec{u}.\vec{v} = 1$.
Calculer : 1) $(\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} - \vec{v})$ 2) $\vec{u}\,.\,(\vec{u} + \vec{v})$ 3) $-2\vec{v}.(3\vec{u} - \vec{v})$

Correction

1) $(\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} - \vec{v})$
$= \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
$= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
$= 2^2 - 3^2$
$= -5$

2) $\vec{u}\,.\,(\vec{u} + \vec{v})$
$= \vec{u}\,.\,\vec{u} + \vec{u}\,.\,\vec{v}$
$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u}\,.\,\vec{v}$
$= 2^2 + 1$
$= 5$

3) $-2\vec{v}.(3\vec{u} - \vec{v})$
$= -6\vec{v}\,.\,\vec{u} + 2\vec{v}\,.\,\vec{v}$
$= -6\vec{v}\,.\,\vec{u} + 2\|\vec{v}\|^2$
$= -6\vec{u}\,.\,\vec{v} + 2\|\vec{v}\|^2$
$= -6 \times 1 + 2 \times 3^2$
$= 12$

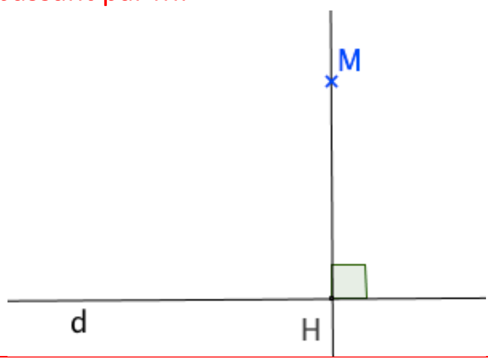
Partie 2 : Produit scalaire et orthogonalité

1) Projeté orthogonal

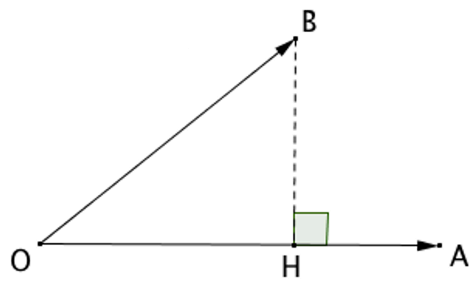
Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration :
Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.
$\vec{u}.\vec{v} = 0$
$\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u} ; \vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow cos(\vec{u} ; \vec{v}) = 0$
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Définition : Soit une droite *d* et un point M.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



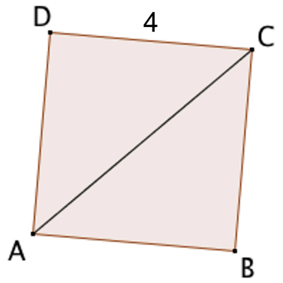
Propriété : Soit $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs non nuls.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



Démonstration :
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}\right)$, d'après la relation de Chasles.
$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$
En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = 0$.

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

Vidéo https://youtu.be/2eTsaa2vVnI
Vidéo https://youtu.be/K4Izn5xB_Qk
Vidéo https://youtu.be/-Hr28g0PFu0



Soit un carré $ABCD$ de côté 4.
Calculer les produits scalaires :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

Correction

a) B est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = 4^2 = 16$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

c) Comme $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$, on a :
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = -\|\overrightarrow{AD}\|^2 = -AD^2 = -4^2 = -16$

Partie 3 : Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.
On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées (1)

Vidéo https://youtu.be/aOLRbG0IibY

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

Correction
$\vec{u}.\vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées (2)
Vidéo https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ

On considère quatre points $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Correction

- Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5-1\\-2-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$

- Calculons le produit scalaire des deux vecteurs :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 3 \times 4 + 2 \times (-6) = 12 - 12 = 0$

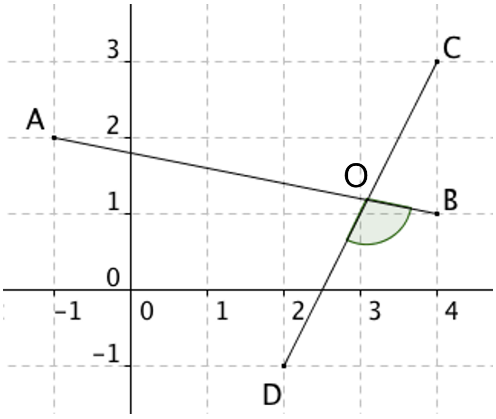
- Le produit scalaire est nul donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Et donc, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Méthode : Appliquer plusieurs formules du produit scalaire

Vidéo https://youtu.be/Ok6dZG8WIL8

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BOD}$ en calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ de deux façons.
On pourra lire les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère ci-contre.



Correction

● En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ avec la formule du cosinus, on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\widehat{BOD})$

Or : $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$CD = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \sqrt{26} \times \sqrt{20} \times \cos(\widehat{BOD})$

$= \sqrt{520} \times \cos(\widehat{BOD})$

● En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ avec la formule des coordonnées, on a :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$, donc :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 5 \times (-2) + (-1) \times (-4) = -6$

● On a ainsi : $\sqrt{520} \times \cos(\widehat{BOD}) = -6$

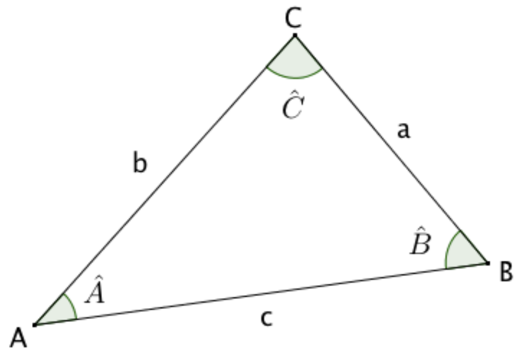
$$\cos(\widehat{BOD}) = -\frac{6}{\sqrt{520}} = -\frac{6}{2\sqrt{130}} = -\frac{3}{\sqrt{130}}$$

Et donc : $\widehat{BOD} \approx 105{,}3°$.

Partie 4 : Théorème d'Al Kashi

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

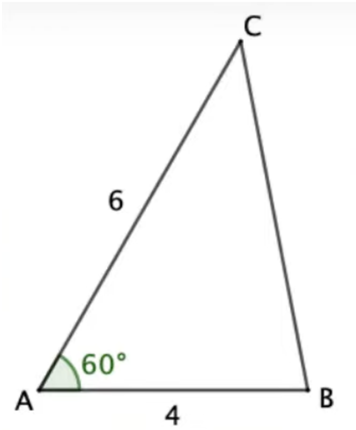


A noter : Si le triangle ABC est rectangle en A, on retrouve le théorème de Pythagore.

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi (1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.
Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :
$2\pi \approx 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi pour calculer une longueur

Vidéo https://youtu.be/SeFjmbOGhVc



On considère la figure ci-contre.
Calculer la longueur BC. On donnera la valeur arrondie au dixième.

Correction

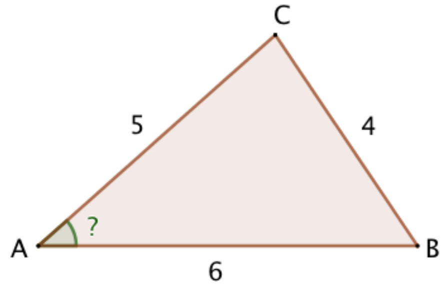
D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$$
$$BC^2 = 4^2 + 6^2 - 2\times 4\times 6\times\cos(60°)$$
$$BC^2 = 16 + 36 - 48\times\frac{1}{2}$$
$$BC^2 = 28$$
$$BC = \sqrt{28} \approx 5{,}3$$

Méthode : Appliquer le théorème d'Al Kashi pour calculer un angle

Vidéo https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc

On considère la figure ci-contre. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près.



Correction

D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos(\widehat{BAC})$
$16 = 36 + 25 - 60\cos(\widehat{BAC})$
$60\cos(\widehat{BAC}) = 36 + 25 - 16$

$60\cos(\widehat{BAC}) = 45$
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{45}{60}$
$\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{3}{4}$
$\widehat{BAC} \approx 41°$

Même les Playmobil connaissent le théorème d'al Kashi !