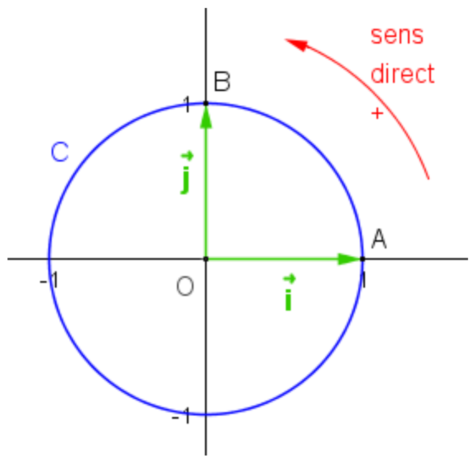
TRIGONOMÉTRIE (Partie 1)

I. Cercle trigonométrique et radian

1) Le cercle trigonométrique



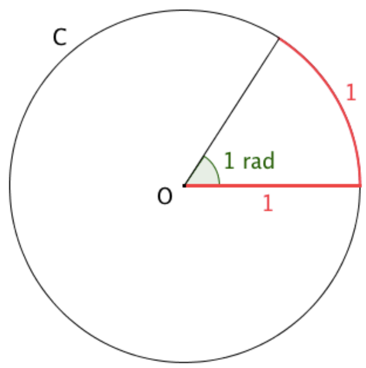
Définition : Sur un cercle, on appelle sens direct, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

2) Le radian

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$
Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π.
On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Définition :
On appelle **radian**, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Méthode : Passer des degrés aux radians et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/-fu9bSBKM00

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

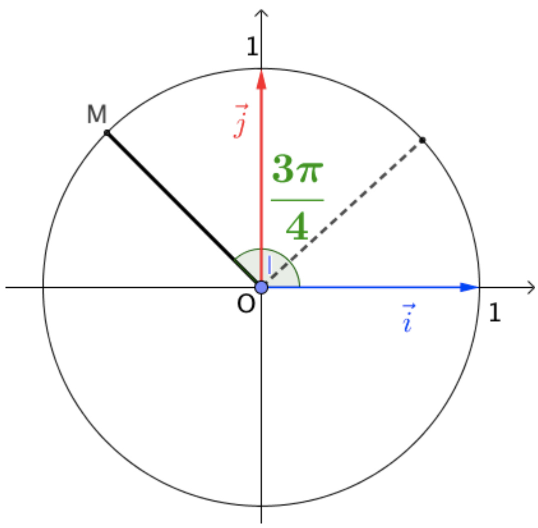
2π	?	$\frac{3\pi}{8}$
360°	33°	?

1) $\alpha = 33 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{11\pi}{60}$ 2) $\beta = \frac{3\pi}{8} \times \frac{360}{2\pi} = 67{,}5°$

II. Mesures d'angles sur le cercle trigonométrique

1) Exemple :

Ci-contre, l'angle orienté $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{3\pi}{4}$ radians en tournant dans le sens direct.



Et, en tournant dans le sens indirect, l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $-\frac{5\pi}{4}$ radians.
Ainsi au point M, on peut faire correspondre les deux angles $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$.
Il est également possible d'effectuer plusieurs tours.
Une autre mesure de $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ est $\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$,
ou encore : $\frac{3\pi}{4} + 4\pi = \frac{19\pi}{4}$,
ou même : $\frac{3\pi}{4} - 4\pi = \frac{-13\pi}{4}$.
L'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ a donc pour mesure $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

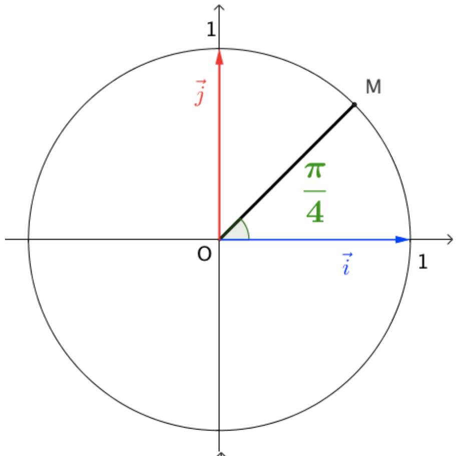
Ainsi, un même angle possède différentes mesures d'angle toutes égales à 2π près.

Méthode : Placer un point sur le cercle trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/jE3ibn-8fDI

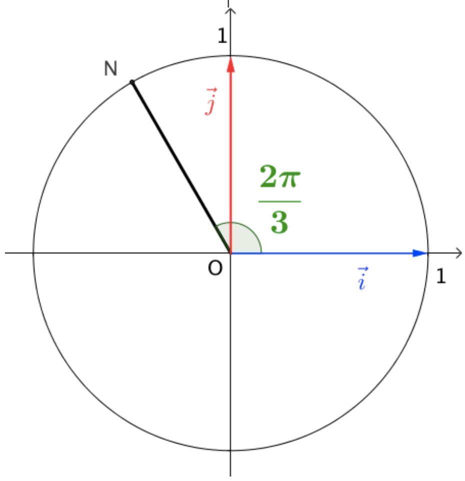
1) Placer sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad.

2) Placer sur le cercle trigonométrique, le point N tel que l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{8\pi}{3}$ rad.



1) $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$
Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{\pi}{4}$ rad.

2) $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$
Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad.



2) Mesure principale d'un angle orienté

Définition : La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

Exemple :

Une mesure d'un angle orienté est $\frac{7\pi}{4}$.

D'autres mesures sont : $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 4\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 6\pi$; … soit : $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{17\pi}{4}$; …

$-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle orienté car c'est la seule comprise entre $-\pi$ exclu et π.

Méthode : Donner la mesure principale d'un angle

Vidéo https://youtu.be/BODMdi2S3rY

Donner la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

- On choisis un multiple de 4 proche de 27, soit 28 :
$\frac{27\pi}{4} = \frac{28\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

$= 7\pi - \frac{\pi}{4}$

- Dans 7π, on fait apparaître un multiple de 2π, soit 6π :

$\frac{27\pi}{4} = 6\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$

$= 6\pi + \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$

$= 6\pi + \frac{3\pi}{4}$

6π correspond à 3 tours entiers.

$\frac{3\pi}{4}$ est bien compris entre $-\pi$ exclu et π.

La mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$ est $\frac{3\pi}{4}$.

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales