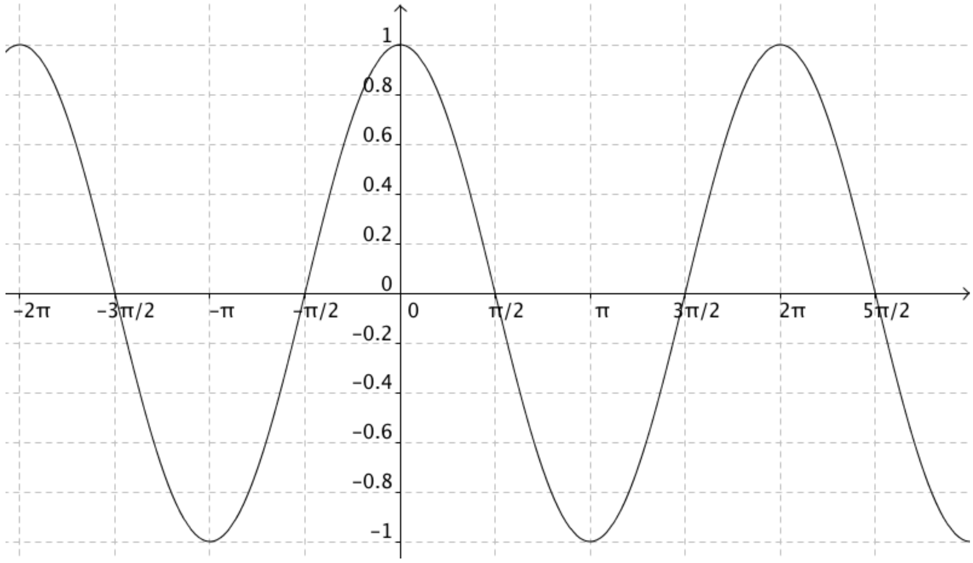
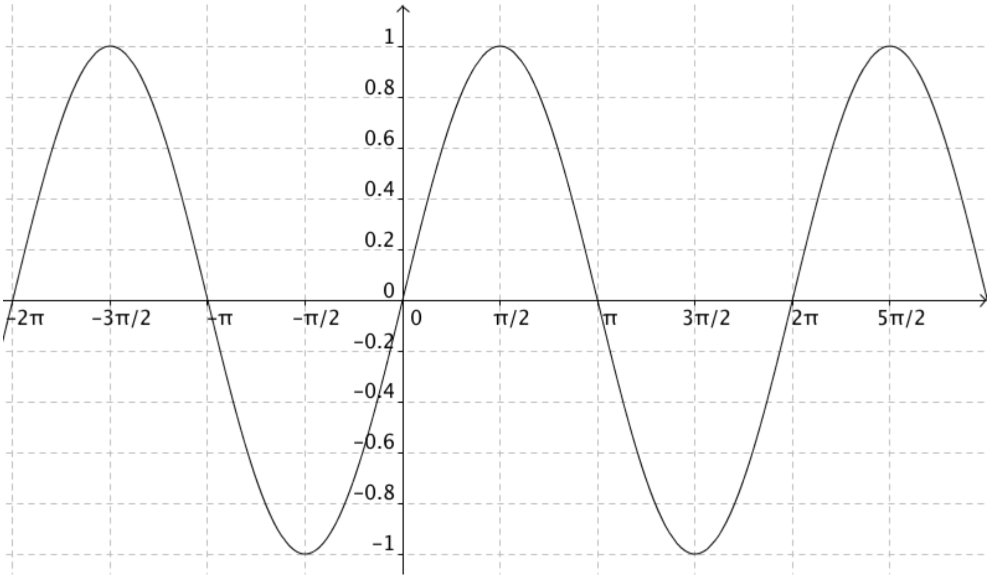
TRIGONOMÉTRIE
(Partie 3)

I. Fonctions cosinus et sinus

1) Représentations graphiques



Fonction cosinus



Fonction sinus

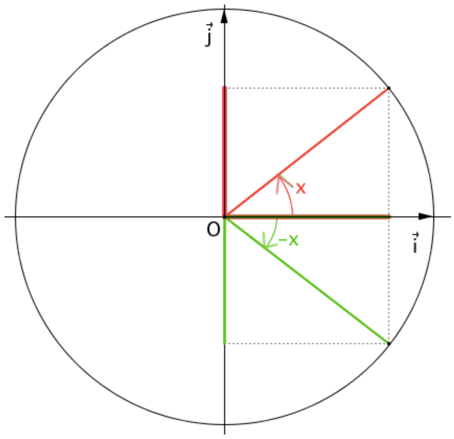
2) Périodicité

On a vu que :
1) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif 2) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

Remarque :
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

Conséquence :
Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

3) Parité



On a vu que :
1) $\sin(-x) = -\sin x$ 2) $\cos(-x) = \cos x$

Remarque :
On dit que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

Conséquences :
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

4) Variations

x	0		π
$\cos x$	1	↘	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0

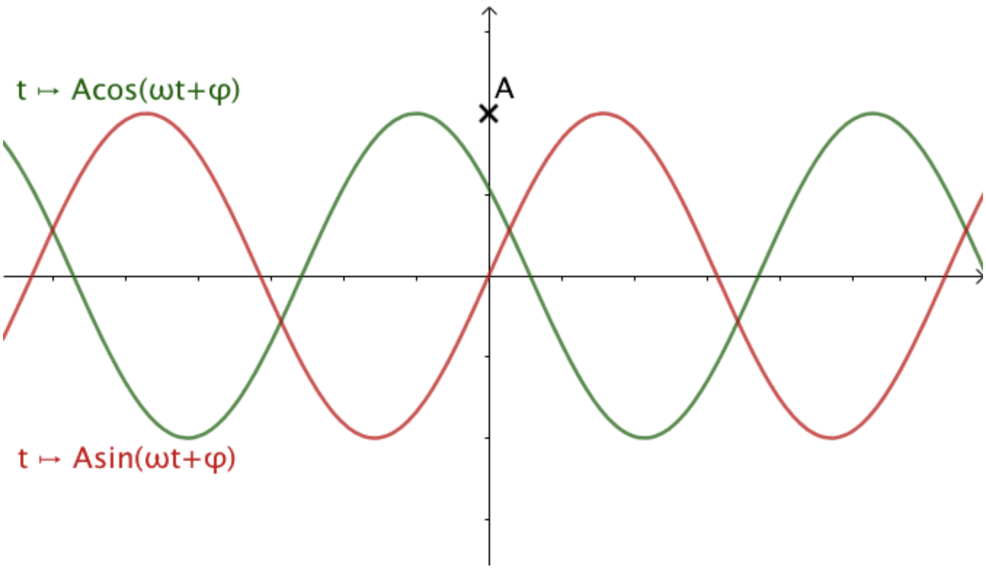
II. Fonctions sinusoïdales $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$

En physique, de nombreux phénomènes sont liés à la propagation d'onde : le son, la lumière, … Les grandeurs associées à ces ondes peuvent être mathématisées par des fonctions sinusoïdales du type $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$.

1) Amplitude

Définition : L'**amplitude** d'une fonction périodique est sa valeur maximale.

Propriété : L'amplitude des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ est A.



3) Phase

Définitions : $\boldsymbol{\omega t + \varphi}$ est appelé la **phase instantanée** du signal.
Si $t = 0$, $\boldsymbol{\varphi}$ est appelée la **phase à l'origine** du signal.
$\boldsymbol{\omega}$ est appelée la **pulsation** du signal.

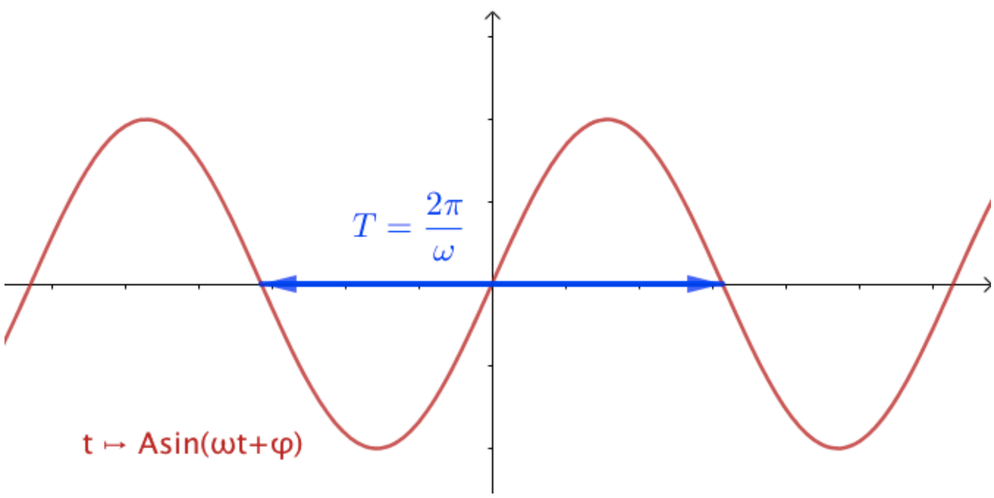
Remarque : En physique, la phase s'exprime en radians et la pulsation en radians par seconde.

3) Période

Définition : La **période** d'une fonction est l'intervalle pour lequel la courbe de la fonction se reproduit à l'identique.

Remarque : En physique, la période s'exprime en secondes.

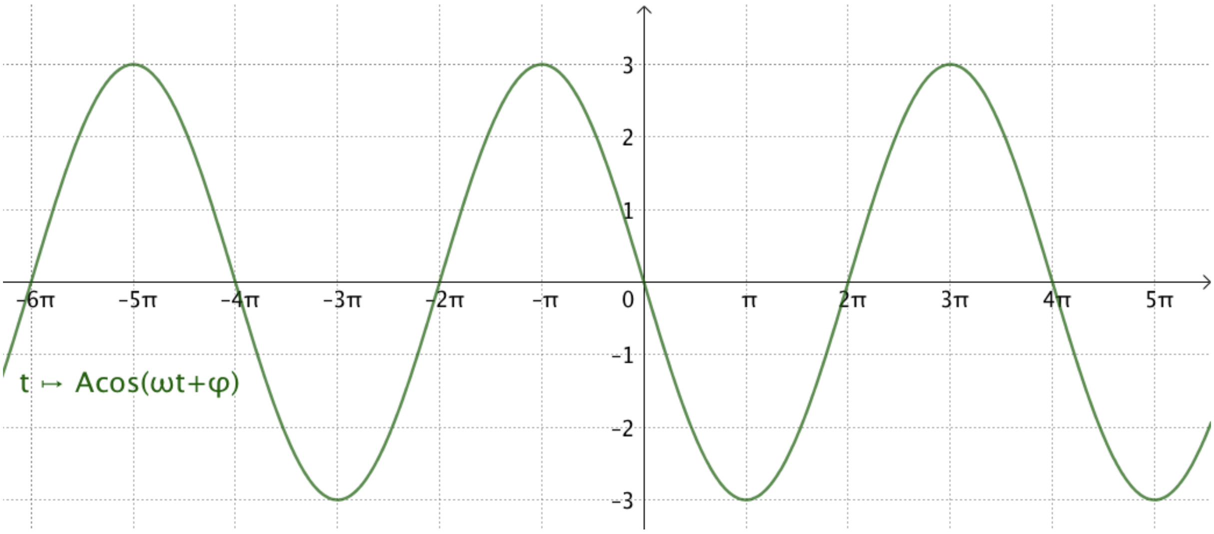
Propriété : La période T des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ est $\frac{2\pi}{\omega}$.



Méthode : Déterminer graphiquement l'expression d'une fonction sinusoïdale

Vidéo https://youtu.be/I0Gp7zTPj14

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction sinusoïdale f du type :
$t \mapsto A\cos(\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\varphi})$
Déterminer à l'aide du graphique l'expression de la fonction f.



- La fonction a pour maximum 3. L'amplitude de f est donc A = 3.

- La période est égale à 4π, donc $\dfrac{2\pi}{\omega} = 4\pi$. Et donc la pulsation ω est égale à $\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, f est de la forme :

$$f(t) = 3\cos\left(\frac{1}{2}t + \varphi\right)$$

- On lit graphiquement que $f(0) = 0$, soit : $3\cos\left(\frac{1}{2} \times 0 + \varphi\right) = 0$, soit encore : $\cos\varphi = 0$.
Ainsi : $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ conviennent.
On lit encore graphiquement que $f(\pi) = -3$, soit : $3\cos\left(\frac{1}{2} \times \pi + \varphi\right) = -3$, soit encore :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -1$$

Testons les valeurs précédentes $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ dans l'équation précédente :
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$ donc $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ convient.
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 0 = 1 \neq -1$ donc $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ ne convient finalement pas.

On en déduit que l'expression de la fonction f est :

$$f(t) = 3\cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$