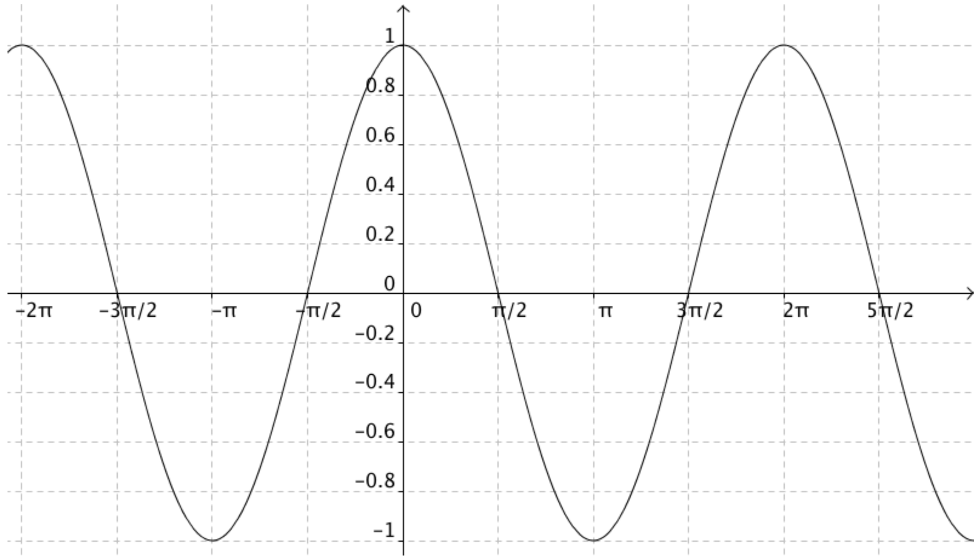
TRIGONOMÉTRIE – Chapitre 3/3

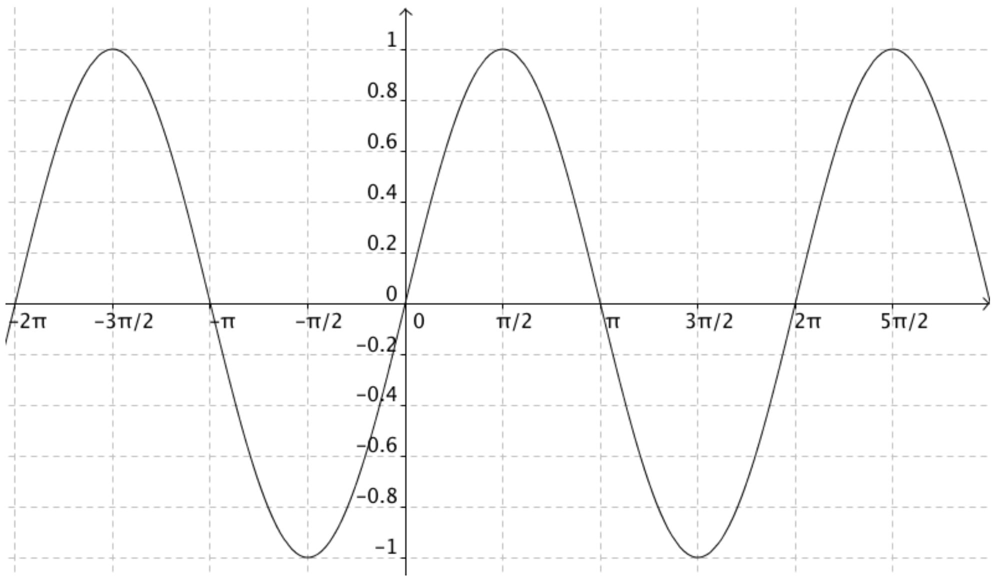
Partie 1 : Fonctions cosinus et sinus

1) Définitions et représentations graphiques

Définitions :
- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
- La **fonction sinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



Fonction cosinus



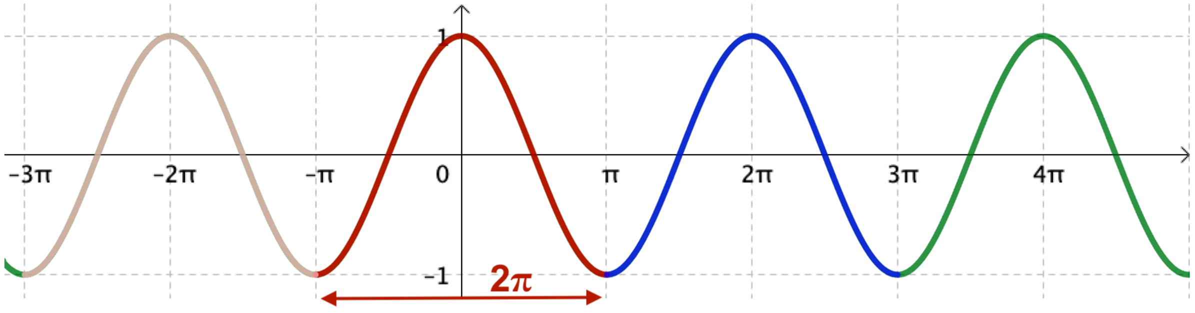
2) Périodicité

Propriétés : 1) $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
2) $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

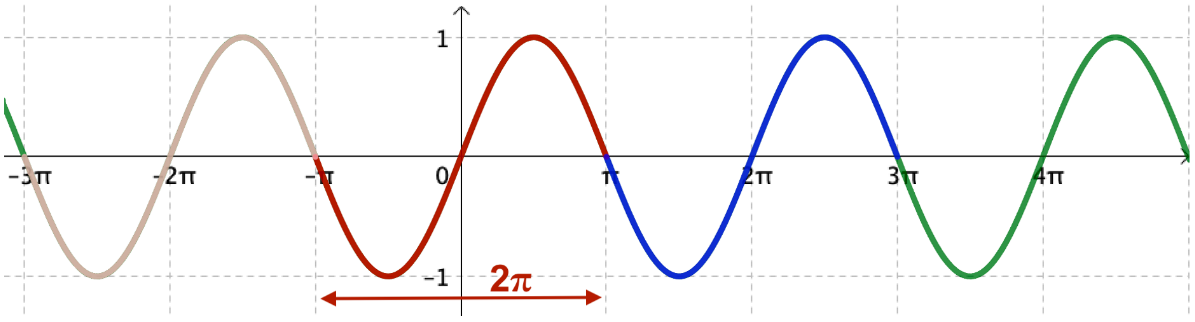
Démonstration : Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque :
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π**.
Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π.

Fonction cosinus



Fonction sinus



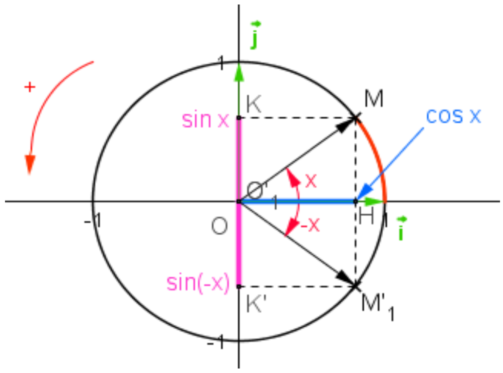
3) Parité

Définitions : - Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une **fonction paire**.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une **fonction impaire**.

Remarques :
- Pour une fonction paire, on a : $f(-x) = f(x)$.
- Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.
Ce sont ces résultats qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire ou impaire.

Propriétés :
- La fonction cosinus est paire et on a : $\cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction sinus est impaire et on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$

Démonstration :
Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.

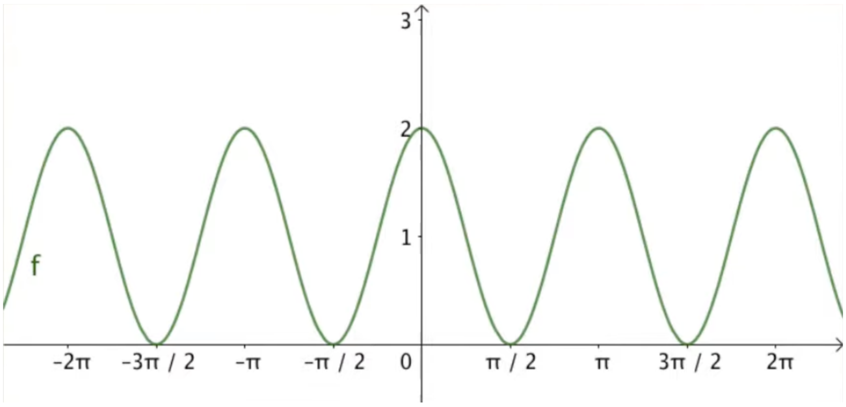


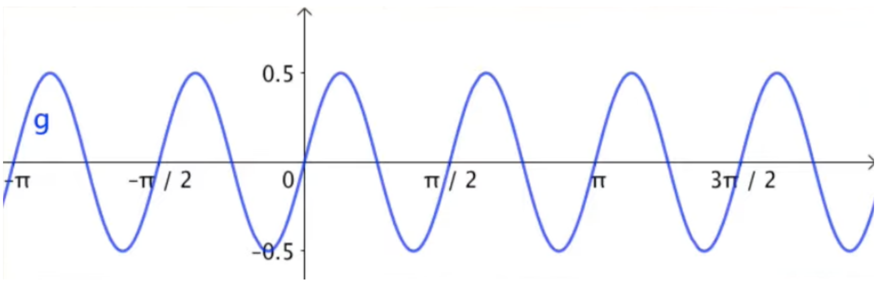
Remarques :
- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

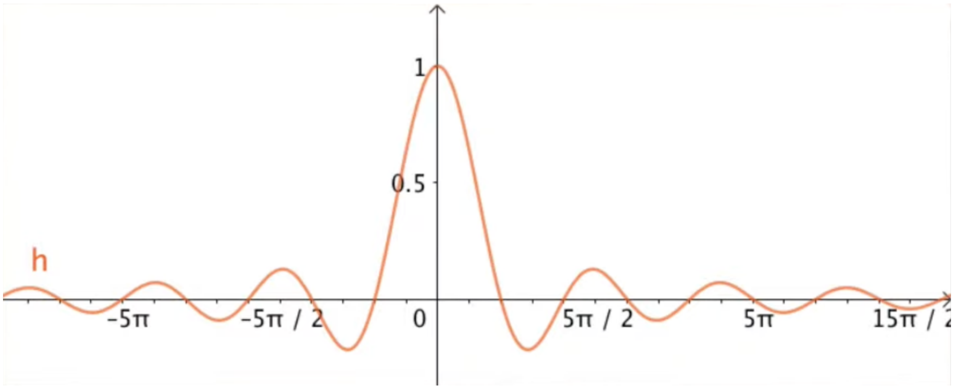
Méthode : Reconnaître graphiquement la parité et la périodicité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/RV3Bi06nQOs

Déterminer graphiquement la parité et la périodicité des fonctions f, g et h représentées ci-dessous :

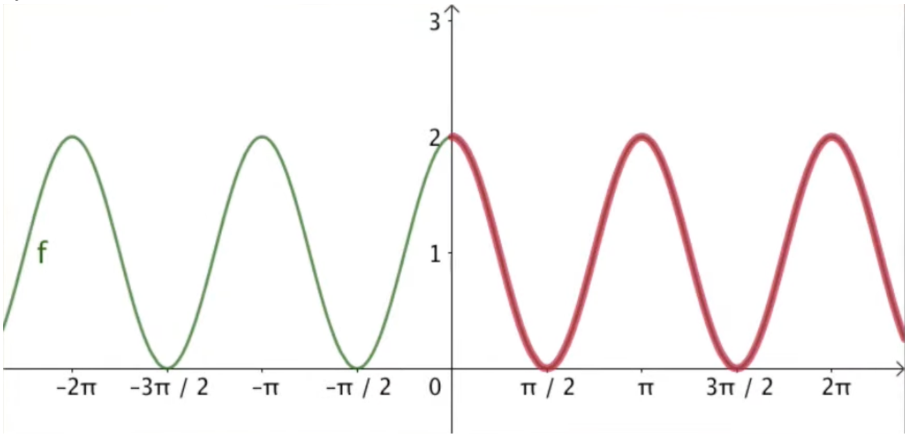




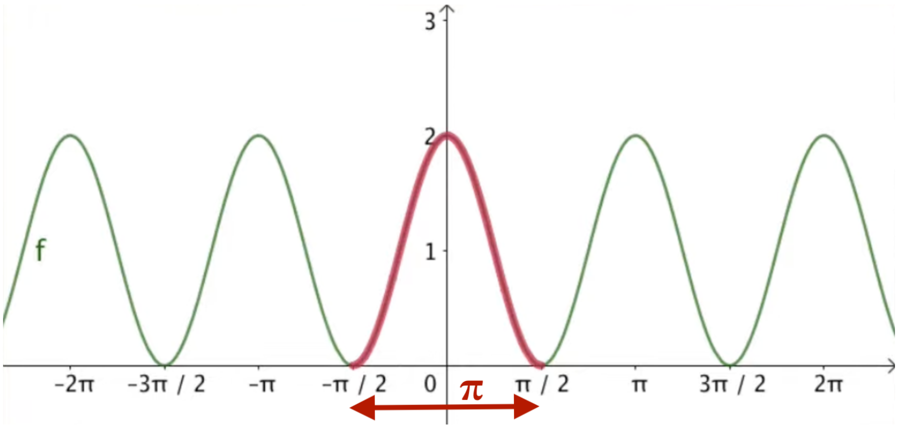


Correction

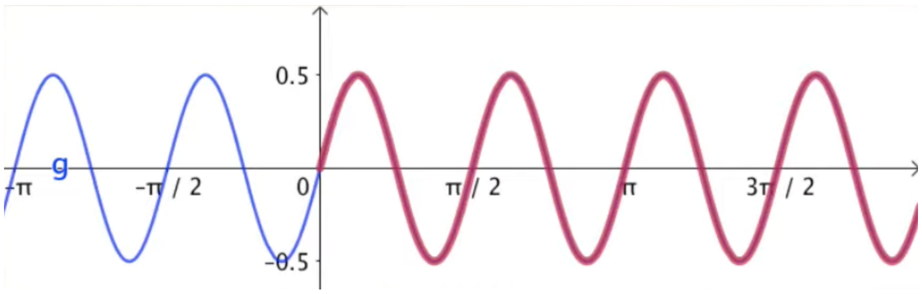
● FONCTION f :
- La fonction f est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



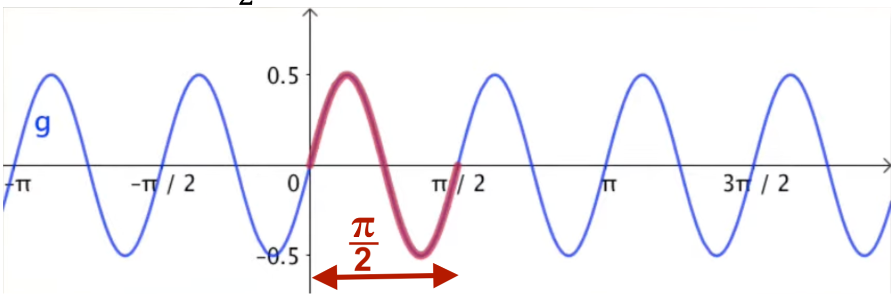
- La fonction f est périodique de période π car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π.



● FONCTION g :
- La fonction g est impaire car sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

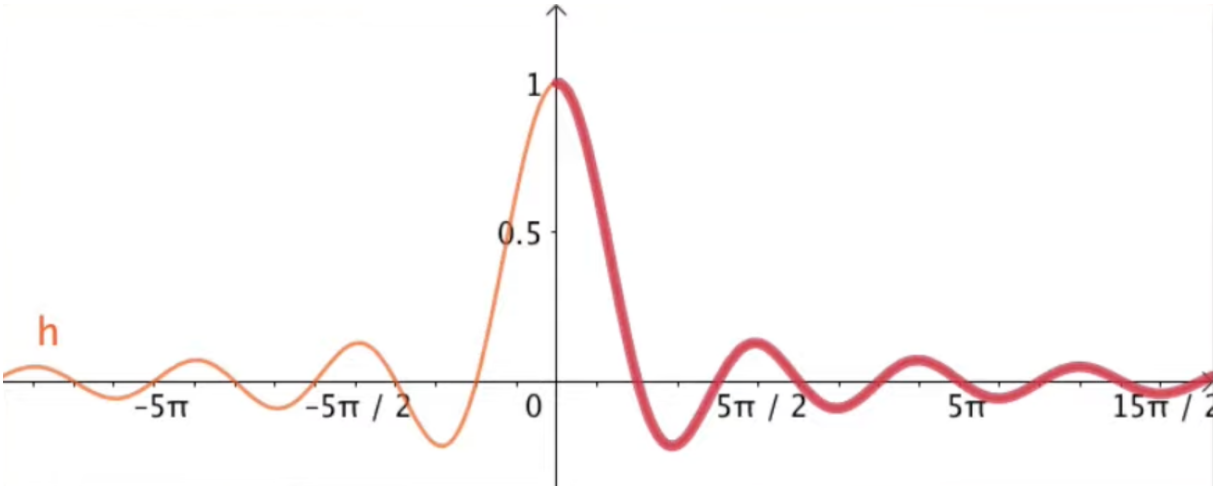


- La fonction g est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ car on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur $\frac{\pi}{2}$.



● FONCTION h :

- La fonction h est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



- La fonction h n'est pas périodique, on ne retrouve pas le même morceau de courbe sur différents intervalles.

Méthode : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/hrbgxnCZW_I

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.

Correction

On a :

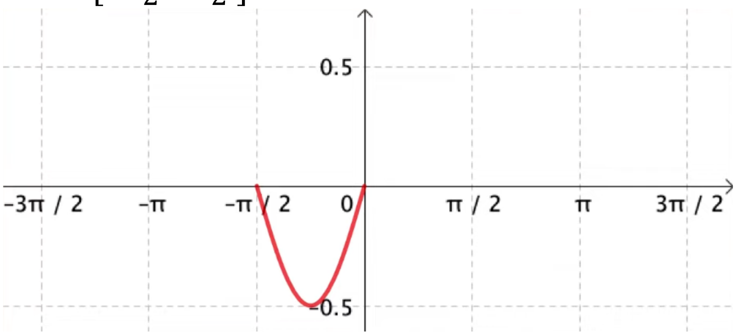
$f(-x) = \sin(-x) - \sin(-2x) = -\sin(x) + \sin(2x) = -(\sin(x) - \sin(2x)) = -f(x)$.

La fonction f est donc impaire.
Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Méthode : Compléter un graphique par parité et périodicité

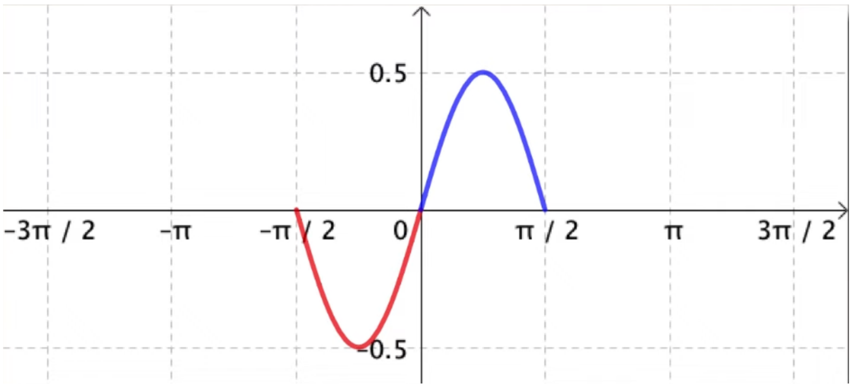
Vidéo https://youtu.be/KbCpqXSvR8M

Soit f une fonction impaire et périodique de période π. Compléter sa représentation graphique sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2} \,;\, \frac{3\pi}{2}\right]$.

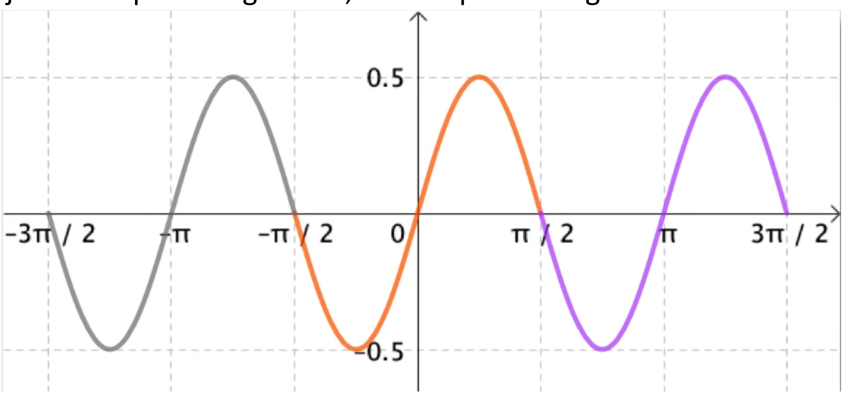


Correction

1ère étape : La fonction est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
On complète donc par symétrie centrale.



2^{e} étape : La fonction est périodique de période π. On retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur π.
Le morceau déjà tracé a pour longueur π, on le reproduit à gauche et à droite.



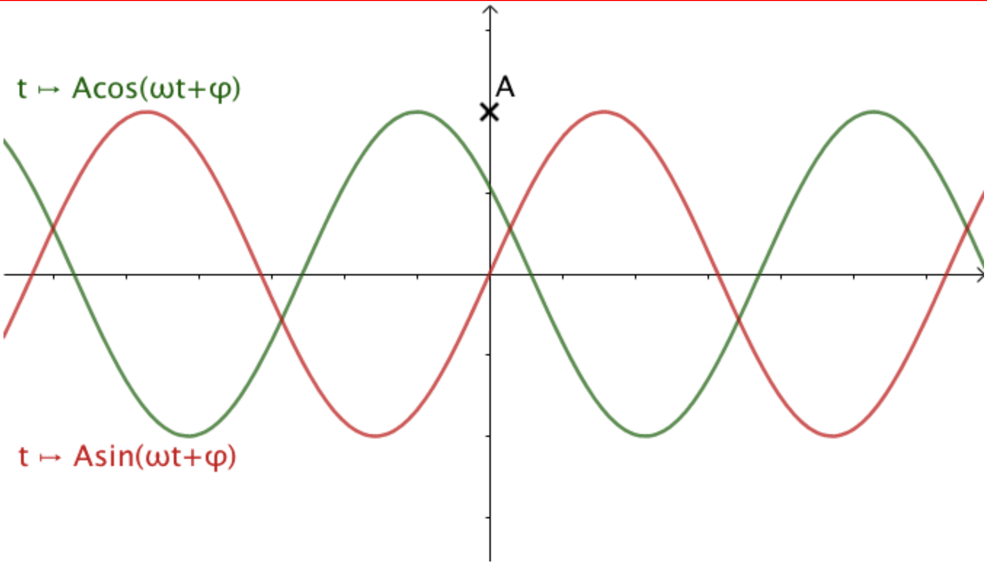
Partie 2 : Fonctions sinusoïdales $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$

En physique, de nombreux phénomènes sont liés à la propagation d'onde :
le son, la lumière, …
Les grandeurs associées à ces ondes peuvent être mathématisées par des fonctions sinusoïdales du type $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$.

1) Amplitude

Définition : L'**amplitude** d'une fonction périodique est sa valeur maximale.

Propriété : L'amplitude des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ est A, avec $A > 0$ et $\omega \neq 0$.



3) Phase

Définitions : $\omega t + \varphi$ est appelé la **phase instantanée** du signal.
Si t = 0, φ est appelée la **phase à l'origine** du signal.
ω est appelée la **pulsation** du signal.

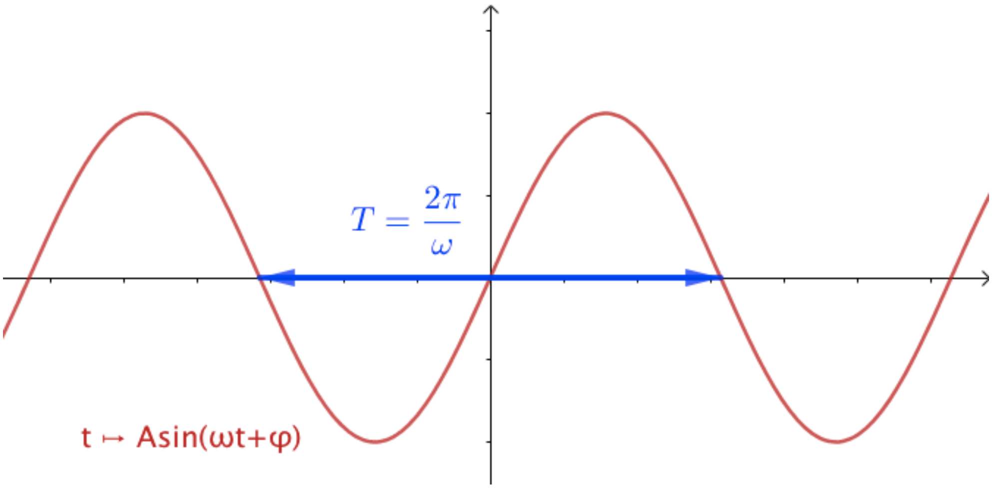
Remarque : En physique, la phase s'exprime en radians et la pulsation en radians par seconde.

3) Période

Définition : La **période** d'une fonction est l'intervalle pour lequel la courbe de la fonction se reproduit à l'identique.

Remarque : En physique, la période s'exprime en secondes.

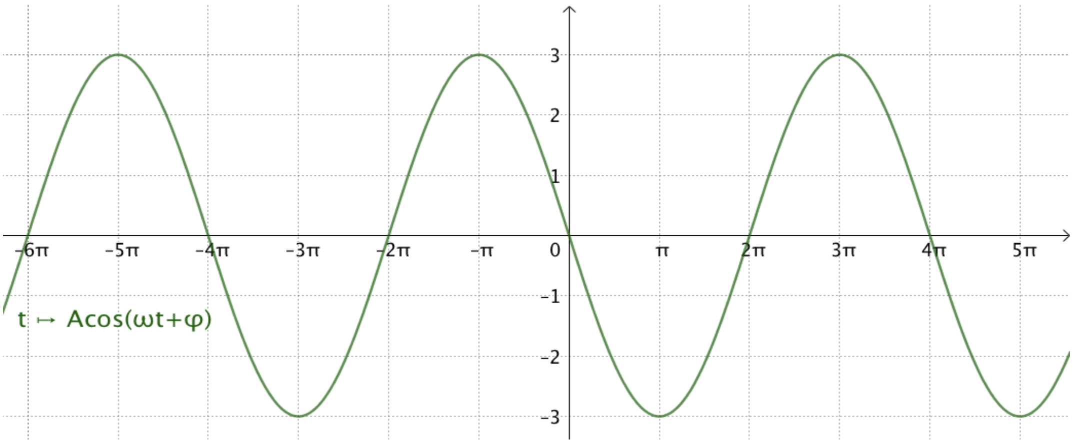
Propriété : La période T des fonctions $t \mapsto Acos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto Asin(\omega t + \varphi)$ est $\frac{2\pi}{\omega}$.



Méthode : Déterminer graphiquement l'expression d'une fonction sinusoïdale

Vidéo https://youtu.be/I0Gp7zTPj14

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction sinusoïdale f du type :
$t \mapsto Acos(\omega t + \varphi)$
Déterminer à l'aide du graphique l'expression de la fonction f.



Correction
- La fonction a pour maximum 3. L'amplitude de f est donc A = 3.

- La période est égale à 4π, donc $\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$. Et donc la pulsation ω est égale à $\frac{1}{2}$.
Ainsi, f est de la forme :

$$f(t) = 3\cos\left(\frac{1}{2}t + \varphi\right)$$

- On lit graphiquement que $f(0) = 0$, soit : $3\cos\left(\frac{1}{2} \times 0 + \varphi\right) = 0$, soit encore : $\cos\varphi = 0$.
Ainsi : $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ conviennent.

On lit encore graphiquement que $f(\pi) = -3$, soit : $3\cos\left(\frac{1}{2} \times \pi + \varphi\right) = -3$, soit encore :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -1$$

Testons les valeurs précédentes $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ dans l'équation précédente :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$ donc $\varphi = \frac{\pi}{2}$ convient.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 0 = 1 \neq -1$ donc $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ne convient finalement pas.

On en déduit que l'expression de la fonction f est :

$$f(t) = 3\cos\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$