

VARIABLES ALÉATOIRES

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/krbtyBDeRqQ>



En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités. Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme celui du *Chevalier de Méré* :
« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »

Partie 1 : Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »

L'ensemble de toutes les issues possibles $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
- Sinon, on perd 1 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou -1 .

Pour les issues 5 et 6, on a : $X = 2$

Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : $X = -1$.

Définition : Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue de l'univers des possibles.

Méthode : Calculer une probabilité à l'aide d'une variable aléatoire

▶ Vidéo <https://youtu.be/IBqkr8pxQ4>

▶ Vidéo https://youtu.be/OnD_Ym95Px4

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- Si cette carte est un cœur, on gagne 5 €.
- Si cette carte est un carreau, on gagne 2 €.
- Dans les autres cas, on perd 1 €.

Soit X la variable aléatoire qui associe le gain du jeu.

Calculer : $P(X = 5)$, $P(X = -1)$ et $P(X \leq 2)$.

Correction

- $P(X = 5)$ est la probabilité de gagner 5 €. On gagne 5 € lorsqu'on tire un cœur. Soit :

$$P(X = 5) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

- $P(X = -1)$ est la probabilité de perdre 1 €. On perd 1 € lorsqu'on ne tire ni un cœur, ni un carreau. Soit :

$$P(X = -1) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

- $P(X \leq 2)$ est la probabilité de gagner moins de 2 €. Soit :

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = -1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

2) Loi de probabilité

Définition : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .
La **loi de probabilité** de X est donnée par toutes les probabilités $P(X = x_i)$.

Remarque : Les « x_i » sont toutes les valeurs prises par X .

Méthode : Déterminer une loi de probabilité d'une variable aléatoire

▶ Vidéo <https://youtu.be/awtn6gsRwfs>

▶ Vidéo https://youtu.be/2Ge_4hclPnl

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.

Soit X la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.
Établir la loi de probabilité de X .

**Correction**

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Par exemple, si on obtient la combinaison (2 ; 5), la plus grande valeur est 5 et on a : $X = 5$.

- La plus grande des deux valeurs est 1, si on obtient la combinaison : (1 ; 1).

$$P(X = 1) = \frac{1}{36}$$

- La plus grande des deux valeurs est 2, si on obtient les combinaisons : (1 ; 2), (2 ; 1) ou (2 ; 2).

$$P(X = 2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

- La plus grande des deux valeurs est 3, si on obtient les combinaisons : (1 ; 3), (3 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 2) ou (3 ; 3).

$$P(X = 3) = \frac{5}{36}$$

- La plus grande des deux valeurs est 4, si on obtient les combinaisons : (1 ; 4), (4 ; 1) (2 ; 4),

(4 ; 2), (3 ; 4), (4 ; 3) ou (4 ; 4).

$$P(X = 4) = \frac{7}{36}$$

• La plus grande des deux valeurs est 5, si on obtient les combinaisons : (1 ; 5), (5 ; 1) (2 ; 5), (5 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3), (4 ; 5), (5 ; 4) ou (5 ; 5).

$$P(X = 5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

• La plus grande des deux valeurs est 6, si on obtient les combinaisons : (1 ; 6), (6 ; 1) (2 ; 6), (6 ; 2), (3 ; 6), (6 ; 3), (4 ; 6), (6 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5) ou (6 ; 6).

$$P(X = 6) = \frac{11}{36}$$

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

Remarque :

On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{1}{4} + \frac{11}{36} = 1$$

Partie 2 : Espérance, variance, écart-type

Définitions : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .

La loi de probabilité de X associée à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.

- L'**espérance** de X est :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

- La **variance** de X est :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

- L'**écart-type** de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Méthode : Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire

▶ Vidéo <https://youtu.be/AcWVxHgtWp4>

▶ Vidéo <https://youtu.be/CbCMJXGhC4k>

▶ Vidéo <https://youtu.be/elpgMDSU5t8>

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.

- Si on tire un roi on gagne 5 €.

- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

X est la variable aléatoire donnant le gain du jeu.

- 1) Calculer l'espérance de X .
- 2) Donner une interprétation du résultat.
- 3) Calculer la variance et l'écart-type de X .

Correction

1) On commence par établir la loi de probabilité de X :

X peut prendre les valeurs -1 €, 2 €, 5 € mais aussi 7 €.

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 2 € (comme un cœur) + 5 € (comme un roi).

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = 2$.

$$P(X = 2) = \frac{7}{32}.$$

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 5$.

$$P(X = 5) = \frac{3}{32}.$$

- Si la carte tirée est le roi de cœur, $X = 7$.

$$P(X = 7) = \frac{1}{32}.$$

- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = -1$.

$$P(X = -1) = \frac{21}{32}.$$

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{32} \approx 0,47$$

2) Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on peut espérer gagner, en moyenne, environ $0,47$ € par tirage.

Si l'organisateur du jeu veut espérer faire un bénéfice, il pourra demander par exemple aux joueurs une participation de $0,50$ € par tirage. Il gagnera en moyenne environ $0,03$ € par tirage.

3) Variance :

$$V(X) = \frac{21}{32} \times \left(-1 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{7}{32} \times \left(2 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{3}{32} \times \left(5 - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{1}{32} \times \left(7 - \frac{15}{32}\right)^2 \approx 5,1865$$

Écart-type :

$$\sigma(X) \approx \sqrt{5,1865} \approx 2,28$$

Propriétés de linéarité (non exigible) :

Soit une variable aléatoire X . Soit a et b deux nombres réels. On a :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad V(aX + b) = a^2V(X)$$

Méthode : Simplifier les calculs d'espérance et de variance à l'aide d'une variable aléatoire de transition (non exigible)

 **Vidéo** <https://youtu.be/ljITvCBExVY>

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.

L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.

On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre. La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X .

Correction

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$.

La loi de probabilité de Y est alors :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(Y = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de Y :

$$E(Y) = -2 \times 0,2 + (-1) \times 0,1 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,1 = 0,1$$

$$V(Y) = 0,2 \times (2 - 0,1)^2 + 0,1 \times (-1 - 0,1)^2 + 0,2 \times (0 - 0,1)^2 + 0,4 \times (1 - 0,1)^2 + 0,1 \times (2 - 0,1)^2 = 1,69$$

On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de X :

$$E(Y) = E(1000X - 1300) = 1000 E(X) - 1300$$

$$\text{Donc : } E(X) = \frac{E(Y) + 1300}{1000} = \frac{0,1 + 1300}{1000} = 1,3001$$

$$V(Y) = V(1000X - 1300) = 1000^2 V(X)$$

$$\text{Donc : } V(X) = \frac{V(Y)}{1000^2} = \frac{1,69}{1000^2}$$

$$\text{Et donc : } \sigma(X) = \sqrt{\frac{1,69}{1000^2}} = \frac{1,3}{1000} = 0,0013$$

Conclusion : $E(X) = 1,3001 \text{ cm}$ et $\sigma(X) = 0,0013 \text{ cm}$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales