# VARIABLES ALÉATOIRES

En 1654, *Blaise Pascal* (1623 ; 1662) entretient avec *Pierre de Fermat* (1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités.
Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme celui du *Chevalier de Méré* :
*« Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »*

## Partie 1 : Variable aléatoire et loi de probabilité

### 1) Variable aléatoire

Exemple :
Soit l'expérience aléatoire : « On lance un dé à six faces et on regarde le résultat. »
L'ensemble de toutes les issues possibles E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} s'appelle l'univers des possibles.
On considère le jeu suivant :
- Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2 €.
- Sinon, on perd 1 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire $X$ sur E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui donne le gain et qui peut prendre les valeurs 2 ou –1.

Pour les issues 5 et 6, on a : $X$ = 2
Pour les issues 1, 2, 3 et 4, on a : $X$ = –1.

Définition : Une **variable aléatoire** $X$ associe un nombre réel à chaque issue de l'univers des possibles.

Méthode : Calculer une probabilité à l'aide d'une variable aléatoire

**Vidéo** https://youtu.be/IBqkrg8pxQ4
**Vidéo** https://youtu.be/OnD_Ym95Px4

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
- Si cette carte est un cœur, on gagne 5 €.
- Si cette carte est un carreau, on gagne 2 €.
- Dans les autres cas, on perd 1 €.
Soit $X$ la variable aléatoire qui associe le gain du jeu.
Calculer : $P(X = 5)$, $P(X = -1)$ et $P(X \leq 2)$.

**Correction**

● $P(X=5)$ est la probabilité de gagner 5 €. On gagne 5 € lorsqu'on tire un cœur. Soit :

$$P(X=5)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

● $P(X=-1)$ est la probabilité de perdre 1 €. On perd 1 € lorsqu'on ne tire ni un cœur, ni un carreau. Soit :

$$P(X=-1)=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

● $P(X\leq 2)$ est la probabilité de gagner moins de 2 €. Soit :

$$P(X\leq 2)=P(X=2)+P(X=-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

2) Loi de probabilité

Définition : Soit une variable aléatoire $X$ prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La **loi de probabilité** de $X$ est donnée par toutes les probabilités $P(X=x_i)$.

Remarque : Les « $x_i$ » sont toutes les valeurs prises par $X$.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité d'une variable aléatoire

**Vidéo** https://youtu.be/awtn6gsRwfs
**Vidéo** https://youtu.be/2Ge_4hclPnI

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.
Soit $X$ la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs.
Établir la loi de probabilité de $X$.

**Correction**
La variable aléatoire $X$ peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Par exemple, si on obtient la combinaison (2 ; 5), la plus grande valeur est 5 et on a : $X=5$.

● La plus grande des deux valeurs est 1, si on obtient la combinaison : (1 ; 1).

$$P(X=1)=\frac{1}{36}$$

● La plus grande des deux valeurs est 2, si on obtient les combinaisons : (1 ; 2), (2 ; 1) ou (2 ; 2).

$$P(X=2)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

● La plus grande des deux valeurs est 3, si on obtient les combinaisons : (1 ; 3), (3 ; 1), (2 ; 3), (3 ; 2) ou (3 ; 3).

$$P(X=3)=\frac{5}{36}$$

● La plus grande des deux valeurs est 4, si on obtient les combinaisons : (1 ; 4), (4 ; 1) (2 ; 4), (4 ; 2), (3 ; 4), (4 ; 3) ou (4 ; 4).

$$P(X = 4) = \frac{7}{36}$$

● La plus grande des deux valeurs est 5, si on obtient les combinaisons : (1 ; 5), (5 ; 1) (2 ; 5), (5 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 3), (4 ; 5), (5 ; 4) ou (5 ; 5).

$$P(X = 5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

● La plus grande des deux valeurs est 6, si on obtient les combinaisons : (1 ; 6), (6 ; 1) (2 ; 6), (6 ; 2), (3 ; 6), (6 ; 3), (4 ; 6), (6 ; 4), (5 ; 6), (6 ; 5) ou (6 ; 6).

$$P(X = 6) = \frac{11}{36}$$

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de $X$ :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{11}{36}$ |

Remarque :
On vérifie que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{1}{4} + \frac{11}{36} = 1$$

## Partie 2 : Espérance

Définitions : Soit une variable aléatoire $X$ prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La loi de probabilité de $X$ associe à toute valeur $x_i$ la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.
L'**espérance** de $X$ est : $E(X) = p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \ \ldots\ + p_n\, x_n$

Méthode : Calculer d'une variable aléatoire

**Vidéo** https://youtu.be/AcWVxHgtWp4
**Vidéo** https://youtu.be/CbCMJXGhC4k

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

$X$ est la variable aléatoire donnant le gain du jeu.
1) Calculer l'espérance de $X$.
2) Donner une interprétation du résultat.

**Correction**
1) On commence par établir la loi de probabilité de $X$ :
$X$ peut prendre les valeurs $-1$ €, 2 €, 5 € mais aussi 7 €.

En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 2 € (comme un cœur) + 5 € (comme un roi).

● Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = 2$.
$P(X = 2) = \frac{7}{32}$.
● Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 5$.
$P(X = 5) = \frac{3}{32}$.
● Si la carte tirée est le roi de cœur, $X = 7$.
$P(X = 7) = \frac{1}{32}$.
● Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X = -1$.
$P(X = -1) = \frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de $X$ est :

| $x_i$ | $-1$ | 2 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{21}{32}$ | $\frac{7}{32}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

$$E(X) = \frac{21}{32} \times (-1) + \frac{7}{32} \times 2 + \frac{3}{32} \times 5 + \frac{1}{32} \times 7 = \frac{15}{32} \approx 0{,}47$$

2) Si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on peut espérer gagner, en moyenne, environ 0,47 € par tirage.
Si l'organisateur du jeu veut espérer faire un bénéfice, il pourra demander par exemple aux joueurs une participation de 0,50 € par tirage. Il gagnera en moyenne environ 0,03 € par tirage.