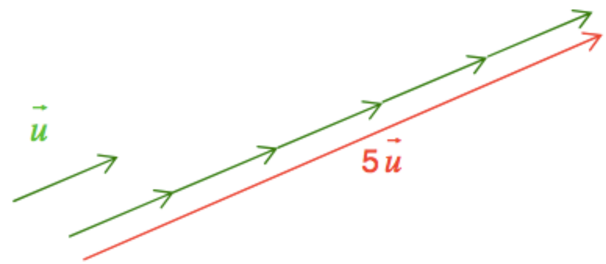
LES VECTEURS (Partie 2)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/aSSDBNn_rRI

I. Produit d'un vecteur par un réel

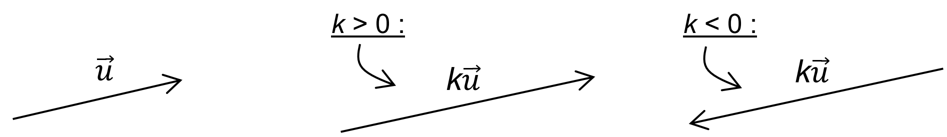
1. Définition

Exemple :
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
Appliquer 5 fois la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 5\vec{u}$



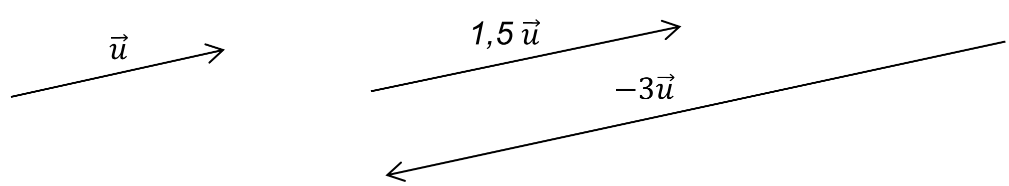
Remarques :
- Les vecteurs $5\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction et le même sens.
- La norme du vecteur $5\vec{u}$ est égale à 5 fois la norme du vecteur $\vec{u}$.

Définition :
$\vec{u}$ est un vecteur quelconque différent de $\vec{0}$ et k un nombre réel non nul.
On appelle **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, le vecteur noté $k\vec{u}$:
- de même direction que $\vec{u}$,
- de même sens que $\vec{u}$ si k > 0 et de sens contraire si k < 0,
- de norme égale à : k fois la norme de $\vec{u}$ si k > 0,
–k fois norme de $\vec{u}$ si k < 0.



Remarque :
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Exemples :



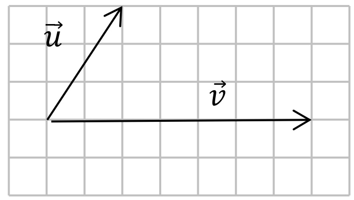
Les vecteurs $\vec{u}$, $1{,}5\,\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ ont la même direction.
$\vec{u}$ et $1{,}5\,\vec{u}$ sont de même sens.
$\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont de sens contraire.
La norme du vecteur $1{,}5\,\vec{u}$ est égale à 1,5 fois la norme de $\vec{u}$.
La norme du vecteur $-3\vec{u}$ est égale à 3 fois la norme de $\vec{u}$.

2. Construction

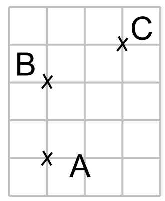
Méthode : Représenter un vecteur défini comme produit et somme de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/1C6KEwbO-b8

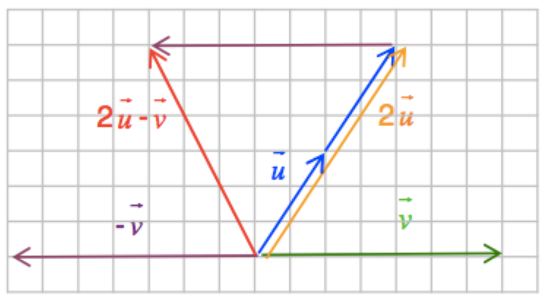
1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Représenter les vecteurs suivants :
$2\vec{u}$, $-\vec{v}$, $2\vec{u}-\vec{v}$.



2) Soit trois points A, B et C.
Représenter le vecteur $\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$.

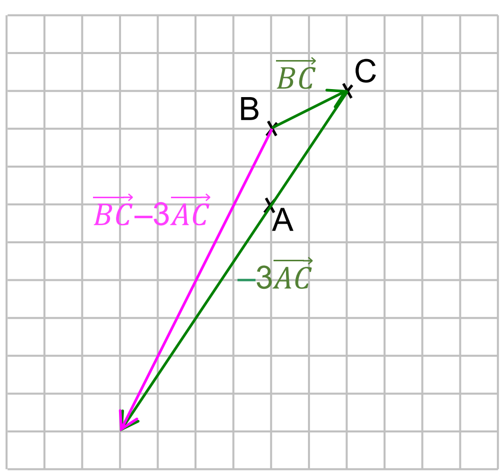


1)



Pour représenter le vecteur $2\vec{u}$, on place bout à bout deux vecteurs $\vec{u}$.
Pour représenter le vecteur $-\vec{v}$, on représente un vecteur de même direction et même longueur que $\vec{v}$ mais de sens opposé.
Pour représenter le vecteur $2\vec{u}-\vec{v}$ ou $2\vec{u}+(-\vec{v})$, on place bout à bout les vecteurs $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$.
Dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit, le vecteur $2\vec{u}-\vec{v}$ a pour origine l'origine du vecteur $2\vec{u}$ et pour extrémité, l'extrémité du vecteur $-\vec{v}$.
On obtiendrait le même résultat en commençant par placer le vecteur $-\vec{v}$ et ensuite le vecteur $2\vec{u}$.

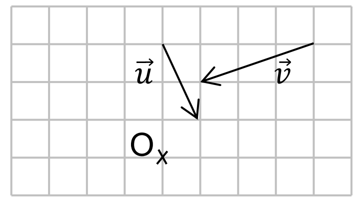
2)



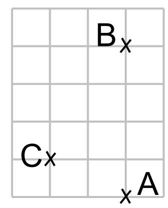
Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} + (-3\overrightarrow{AC})$, on place bout à bout les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $-3\overrightarrow{AC}$.

Méthode : Construire un point vérifiant une égalité vectorielle

Vidéo https://youtu.be/JxYpPE6iPEA

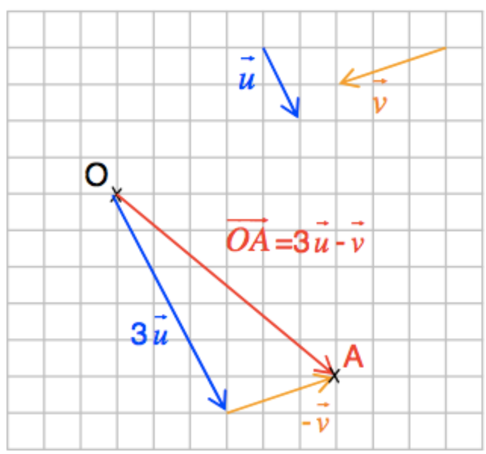


1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O du plan.
Construire le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$.



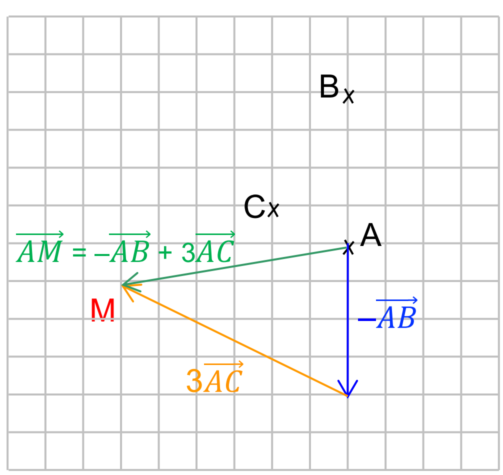
2) Soit trois points A, B, C du plan.
Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

1)



Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$, on place bout à bout à partir du point O les vecteurs $3\vec{u}$ et $-\vec{v}$.
Le point A se trouve à l'extrémité du vecteur $-\vec{v}$ dans « *le chemin* » de vecteurs ainsi construit.

2)



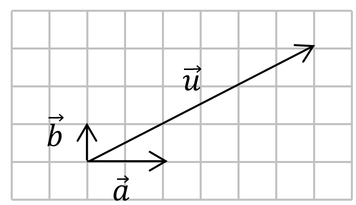
Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$, on place bout à bout à partir de A les vecteurs $-\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AC}$.
Le point M se trouve à l'extrémité du vecteur $3\overrightarrow{AC}$ dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit.

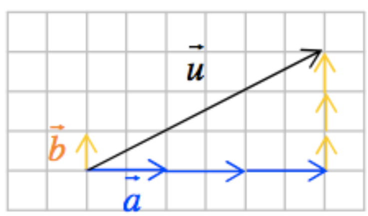
Activité de groupe : Course d'orientation *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Course_vect.pdf*

Méthode : Exprimer par lecture graphique un vecteur en fonction d'autres vecteurs

Vidéo https://youtu.be/ODZGKdlKewo

Par lecture graphique, exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.





On construit *« un chemin »* de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.
On compte ainsi le nombre de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant *« le chemin »*.

$$\vec{u} = 3\vec{a} + 3\vec{b}.$$

II. Notion de colinéarité

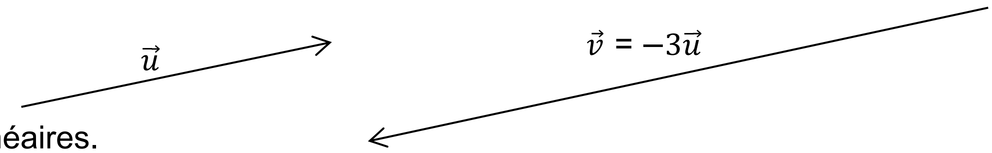
1. Définition

Définition :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque :
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Exemple :

$\vec{v} = -3\vec{u}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



Méthode : Démontrer que des vecteurs sont colinéaires

Vidéo https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg

On donne $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit un vecteur $\vec{v}$ tel que $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$
$-4\vec{u} = -3\vec{v}$
$\frac{4}{3}\vec{u} = \vec{v}$

Il existe un nombre réel $k = \frac{4}{3}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2. Applications

Propriétés :
1) A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan.
Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) Dire que les points distincts A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3. Transformations et vecteurs

Propriétés :
1) Si une symétrie centrale transforme A en A' et B en B' alors : $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.
2) Si une homothétie de rapport λ transforme A en A' et B en B' alors : $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.