COMPOSITION DE FONCTIONS

I. Composée de deux fonctions

Exemple :
On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x-3}$
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f\,:\; x \overset{u}{\longmapsto} x-3 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$$

Les fonctions u et v sont définies par : $u(x)=x-3$ et $v(x)=\sqrt{x}$

On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :

$$f(x)=v\circ u\,(x)=v\big(u(x)\big)=\sqrt{x-3}$$

Définition : On appelle **fonction composée** de u par v la fonction notée $v\circ u$ définie par : $v\circ u\,(x)=v\big(u(x)\big)$.

Méthode : Identifier la composée de deux fonctions

Vidéo https://youtu.be/08HgDgD6XL8

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
Identifier la composée de deux fonctions dans la fonction f.

Dans f, on reconnait la fonction inverse et la fonction carré.
Si on pose : $u(x)=x^2$ et $v(x)=\frac{1}{x}$
On a alors : $f(x)=\frac{1}{x^2}=\frac{1}{u(x)}=v\big(u(x)\big)=v\circ u\,(x)$.
La fonction f est la composée de la fonction carré par la fonction inverse.

Méthode : Composer deux fonctions

Vidéo https://youtu.be/sZ2zqEz4hug

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x)=x^2+x$ et $v(x)=\frac{x}{x+1}$.
Exprimer les fonctions $v\circ u$ et $u\circ v$ en fonction de x.

On a : $u(x)=x^2+x$ et $v(x)=\frac{x}{x+1}$

$$v\circ u(x)=v\big(u(x)\big)=\frac{x^2+x}{x^2+x+1}$$

$u \circ v(x) = u\big(v(x)\big) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{x}{x+1}$

II. Formules de dérivation d'une fonction composée

1) Cas particuliers de fonctions composées

Fonction	Dérivée
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

Méthode : Déterminer la dérivée de fonctions composées

Vidéo https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o

Vidéo https://youtu.be/-zrhBc9xdRs

Déterminer les dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$ b) $g(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$ c) $h(x) = \ln(2x - x^2)$

a) On pose : $f(x) = \big(u(x)\big)^4$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

Donc : $f'(x) = 4u'(x)\big(u(x)\big)^3$

$= 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3$

b) On pose : $g(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Donc : $g'(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$

$= 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$

$= -\dfrac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

c) On pose : $h(x) = \ln\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = 2x - x^2 \rightarrow u'(x) = 2 - 2x$

Donc : $h'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$= \dfrac{2 - 2x}{2x - x^2}$

2) Cas général

Propriété : $(v(u(x)))' = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$ ou encore $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

Méthode : Déterminer la dérivée d'une fonction composée (cas général)

Vidéo https://youtu.be/lwcFgnbs0Ew

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$

Alors : $f(x) = \sqrt{x^2+1} = v\big(u(x)\big)$

On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc : $f'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$

$$= 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

III. Formules de primitives des fonctions composées

Fonction	Une primitive
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$ où F est une primitive de f
$u'u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$

Méthode : Recherche de primitives

Vidéo https://youtu.be/dvVfFxbRT5M

Vidéo https://youtu.be/iiq6eUQee9g

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ b) $f(x) = xe^{x^2}$

c) $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(3x-1)$

a) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ du type $u'u^n$
avec $u(x) = x^2-5x+4 \rightarrow u'(x) = 2x-5$
Une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$, avec $n = 2$.
Soit : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-5x+4)^3$

b) $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}2xe^{x^2}$ du type $u'e^u$ avec $u(x) = x^2 \rightarrow u'(x) = 2x$
Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u.
Soit : $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

c) $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(3x-1) = \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) - 3\sin(3x-1)$
Donc $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \cos(3x-1)$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Vidéo https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw
Vidéo https://youtu.be/BhrCsm5HaxQ
Vidéo https://youtu.be/uVMRZSmYcQE

Calculer :

$$\int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx$$

On note : $f(x) = e^{-2x} = \frac{1}{-2}(-2)e^{-2x}$
Une primitive de f est F tel que : $F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x}$
Donc :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{-2x}\,dx &= \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1} = F(1) - F(-1)\\ &= \frac{1}{-2}e^{-2\times 1} - \frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}\\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)\end{aligned}$$

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales