

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/5oBnmZVrOXE>

Partie 1 : Probabilités conditionnelles et tableaux

Définition :

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. On la note : $P_A(B)$.

Remarque : On rappelle que, comme pour les probabilités simples, on a :

$$0 \leq P_A(B) \leq 1$$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide d'un tableau

▶ Vidéo <https://youtu.be/7tS60nk6Z2I>

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

1) On choisit au hasard un patient et on considère les événements suivants :

A : « Le patient a pris le médicament A. »

G : « Le patient est guéri. »

Calculer : a) $P(A)$ b) $P(G)$ c) $P(G \cap A)$ d) $P(\bar{G} \cap A)$

2) a) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.

Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu'il est guéri**.

b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B.

Calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu'il a pris le médicament B**.

Correction

1) a) La probabilité qu'un patient soit traité avec le médicament A est égale à :

$$P(A) = \frac{455}{800} \approx 0,57 = 57 \%$$

b) La probabilité qu'un patient soit guéri est égale à : $P(G) = \frac{674}{800} \approx 0,84 = 84 \%$.

c) La probabilité qu'un patient soit guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à

$$P(G \cap A) = \frac{383}{800} \approx 0,48 = 48 \%$$

d) La probabilité qu'un patient ne soit pas guéri et qu'il soit traité par le médicament A est égale à : $P(\bar{G} \cap A) = \frac{72}{800} \approx 0,09 = 9 \%$.

2) a)

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu'il est guéri** se note $P_G(A)$ et est égale à $P_G(A) = \frac{383}{674} \approx 0,57 = 57 \%$. On regarde uniquement **la ligne des patients guéris**.

b)

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

La probabilité que le patient soit guéri **sachant qu'il a pris le médicament B** se note $P_{\bar{A}}(G)$ et est égale à $P_{\bar{A}}(G) = \frac{291}{345} \approx 0,84 = 84 \%$. On regarde uniquement **la colonne du médicament B**.

Propriété : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Méthode : Calculer une probabilité conditionnelle à l'aide de la formule

 Vidéo https://youtu.be/SWmkdKxXf_I

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'événement : « Le résultat est un pique ».

Soit B l'événement : « Le résultat est un roi ».

Calculer $P_A(B)$, la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique.

Correction

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{32}.$$

Donc la probabilité que le résultat soit un roi sachant qu'on a tiré un pique est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{32} : \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Remarque : On peut retrouver intuitivement ce résultat. En effet, parmi les piques, on a 1 chance sur 8 d'obtenir le roi.

Partie 2 : Arbre pondéré et probabilités totales

1) Propriétés

Formules : Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

$$- P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

$$- P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

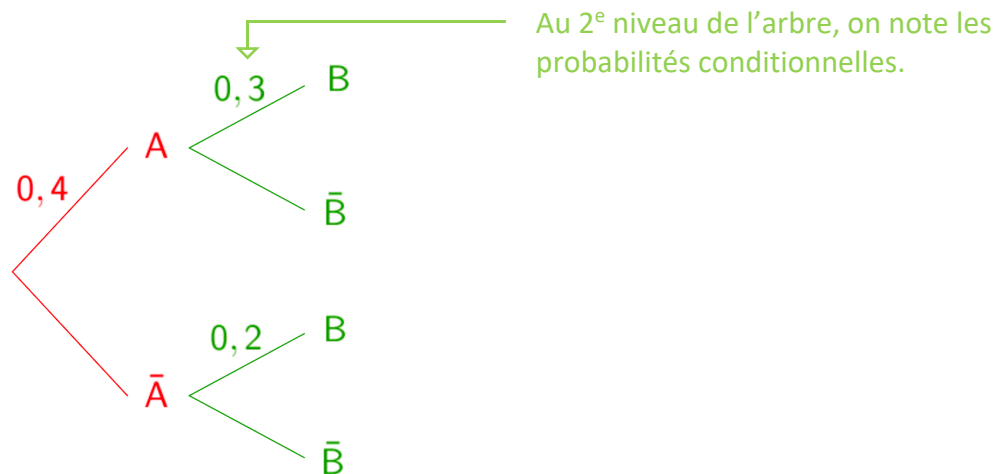
2) Construire un arbre pondéré

Exemple :

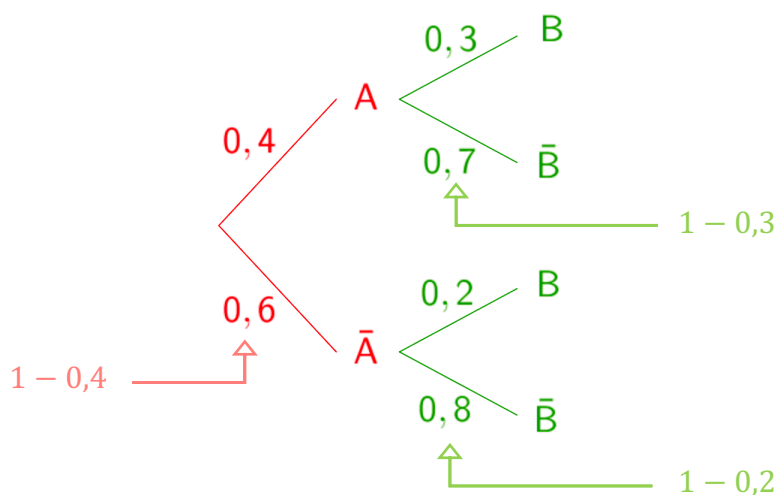
📺 Vidéo <https://youtu.be/Pc5kJBkPDbo>

On donne : $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$

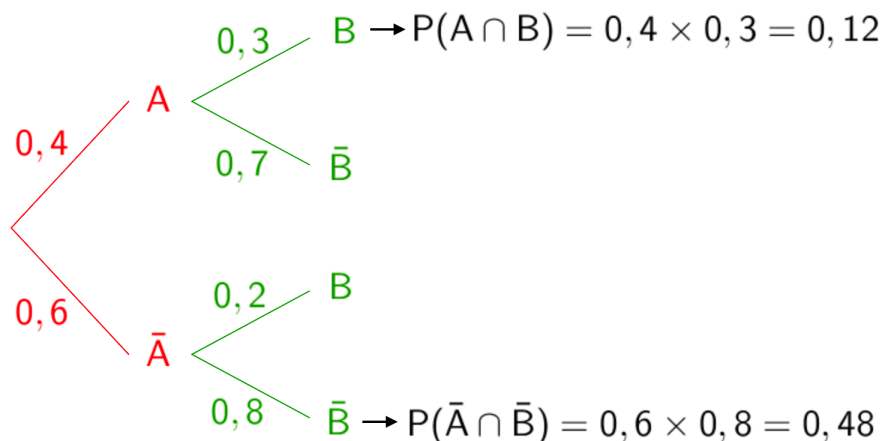
- On reporte ces probabilités dans l'arbre :



- On complète les probabilités manquantes :



- On calcule les probabilités d'intersections :



On utilise la formule :
 $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

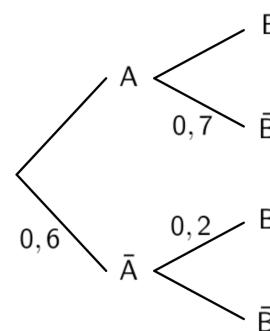
Méthode : Construire un arbre pondéré

📺 Vidéo <https://youtu.be/o1HQ6xJ7o4U>

On donne l'arbre pondéré ci-contre.

a) Traduire les données de l'arbre sous forme de probabilités.

b) À l'aide de l'arbre, calculer $P(A)$, $P_{\bar{A}}(\bar{B})$ et $P(A \cap \bar{B})$.



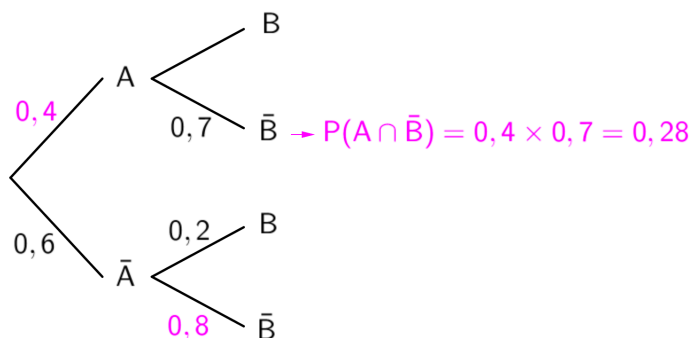
Correction

a) $P(\bar{A}) = 0,6$, $P_A(\bar{B}) = 0,7$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$.

b) • $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$

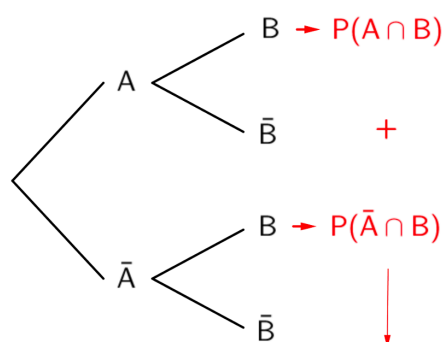
• $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - 0,2 = 0,8$

• $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$
 $= 0,4 \times 0,7 = 0,28$



3) Formule des probabilités totales

Propriété :



$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
 (Formule des probabilités totales)

Méthode : Appliquer la formule des probabilités totales

 Vidéo <https://youtu.be/qTpTBoZA7zY>

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

– si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;

– si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

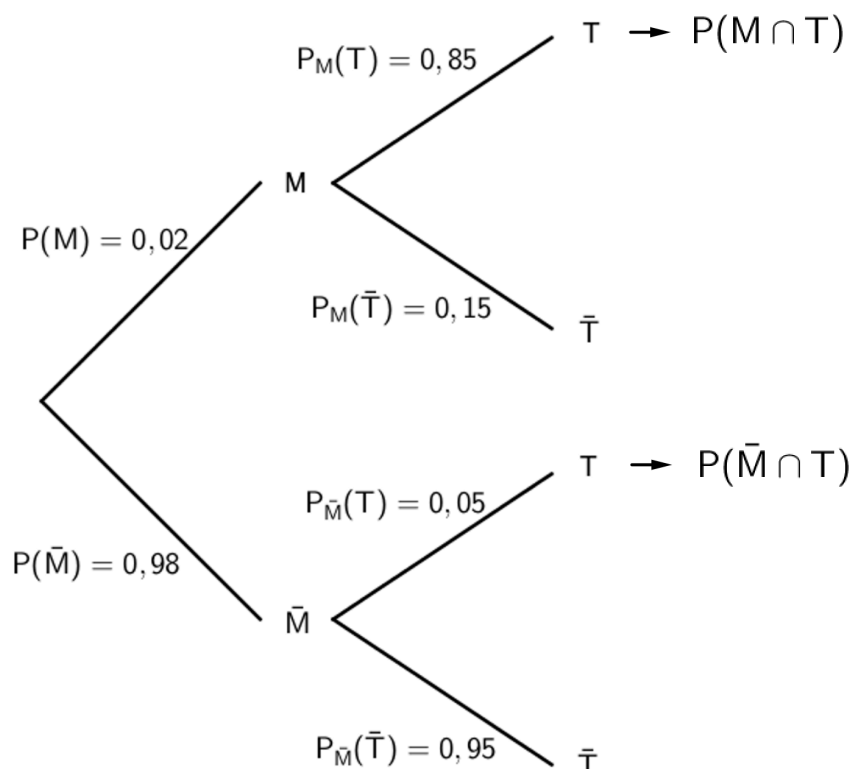
a) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?

b) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

D'après BAC S, Antilles-Guyanne 2010

Correction

a) On construit et on complète un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\
 &= 0,02 \times 0,85 + 0,98 \times 0,05 = 0,066.
 \end{aligned}$$

La probabilité que le test soit positif est égale à 6,6 %.

$$b) P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,02 \times 0,85}{0,066} \approx 0,26.$$

La probabilité que le bovin soit malade sachant que le test est positif est d'environ 26 %.

Partie 3 : Probabilités et indépendance

Définition : On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

Exemples :

a) On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit R l'évènement : « On tire un roi ».

Soit T l'évènement : « On tire un trèfle ».

$$\text{On a : } P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Par ailleurs, $P_T(R)$ est la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles. On a alors :

$$P_T(R) = \frac{1}{8}$$

Ainsi, $P_T(R) = P(R)$.

Les évènements R et T sont donc indépendants.

b) On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.

Ainsi :

$$P(R) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}.$$

$$P_T(R) = \frac{1}{8}$$

Ainsi, $P_T(R) \neq P(R)$.

Les évènements R et T ne sont donc pas indépendants.

Méthode : Utiliser l'indépendance de deux évènements

 Vidéo <https://youtu.be/fcmwzbnz2F4>

Dans une population, un individu est atteint par la maladie a avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie b avec une probabilité égale à 0,01.

On choisit au hasard un individu de cette population.

Soit A l'évènement "L'individu a la maladie a ".

Soit B l'évènement "L'individu a la maladie b ".

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

a) Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies.

b) Calculer $P(A \cup B)$. Interpréter le résultat.

Correction

a) La probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies est $P(A \cap B)$.

Or, d'après la formule de probabilité conditionnelle, on a :

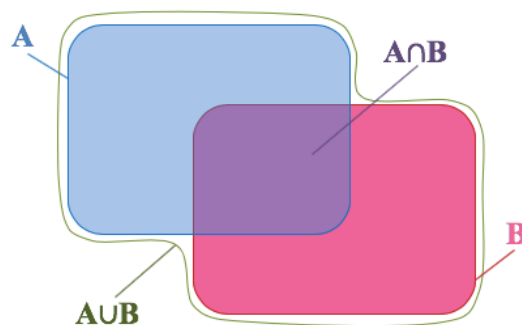
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit : } P(A \cap B) &= P_B(A) \times P(B) \\ &= P(A) \times P(B), \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants.} \\ &= 0,005 \times 0,01 \\ &= 0,00005 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies est égale à 0,00005.

$$\begin{aligned} \text{b) On a : } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,005 + 0,01 - 0,00005 \\ &= 0,01495 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu choisi au hasard ait au moins une des deux maladies est égale à 1,495 %.



© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Nom du document : 20CondTT.docx
Répertoire : /Users/yvanmonka/Dropbox/Maths/5ème/Cours 5e
Modèle : Normal.dotm
Titre :
Sujet :
Auteur : Yvan MONKA
Mots clés :
Commentaires :
Date de création : 29/08/2019 22:07:00
N° de révision : 44
Dernier enregistr. le : 11/10/2023 22:34:00
Dernier enregistrement par : MONKA Elia
Temps total d'édition : 125 Minutes
Dernière impression sur : 11/10/2023 22:35:00
Tel qu'à la dernière impression
Nombre de pages : 7
Nombre de mots : 1 144
Nombre de caractères : 6 781 (approx.)