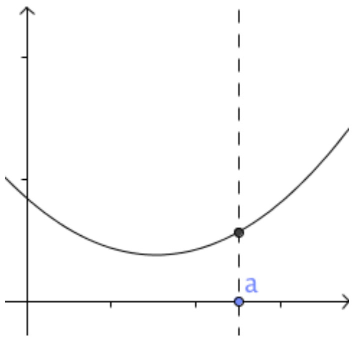
CONTINUITÉ DES FONCTIONS

I. Notion de continuité

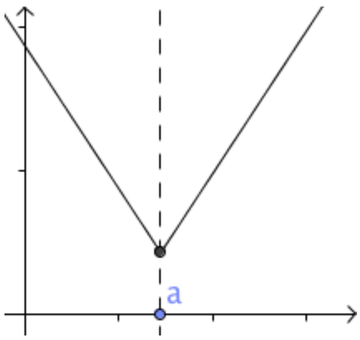
Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

Vidéo https://youtu.be/XpjKserte6o

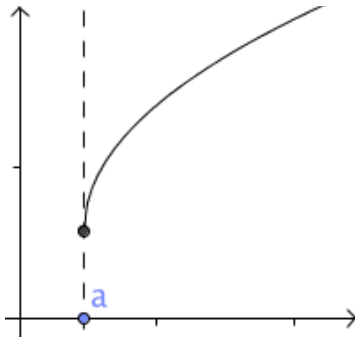
Exemples et contre-exemples :



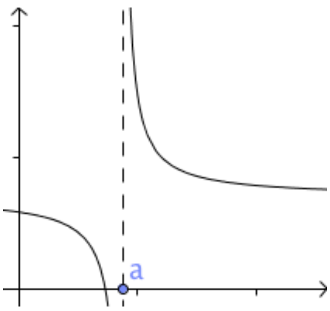
f est continue en a



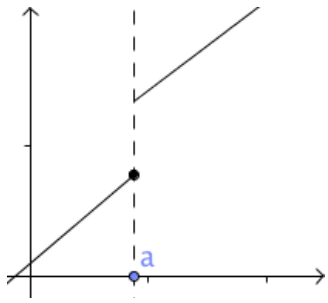
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.
- f est continue en a si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemples :
- Les fonctions $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et elle est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

- Admis -

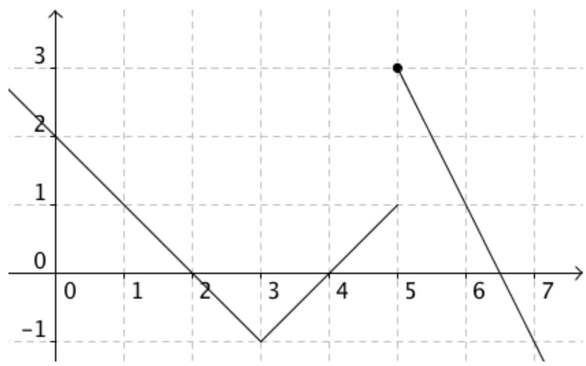
Méthode : Étudier la continuité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/03WMLyc7rLE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2, \; pour\ x < 3. \\ x-4, \; pour\ 3 \leq x < 5 \\ -2x+13, \; pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \longmapsto -x+2$, $x \longmapsto x-4$ et $x \longmapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty\,;3[$, sur $[3\,;\,5[$ et sur $[5\,;\,+\infty[$.



Étudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} -x+2 = -3+2 = -1$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x-4 = 3-4 = -1$

Donc : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

donc la fonction f est continue en 3.

- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} x-4 = 5-4 = 1$

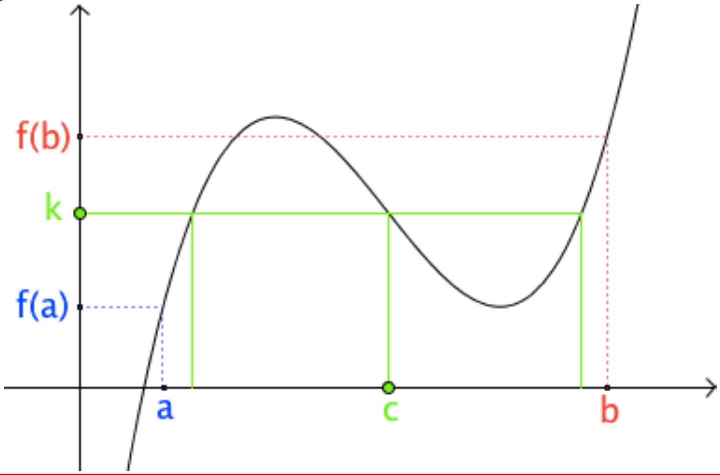
$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} -2x+13 = -2\times 5+13 = 3$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.
La fonction f n'est donc pas continue en 5.

La fonction f est continue sur $]-\infty\,;5[$ et sur $[5\,;\,+\infty[$.

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



- Admis -

Conséquence :
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Cas particuliers :
- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Méthode : Résolution approchée d'une équation

EXEMPLE 1

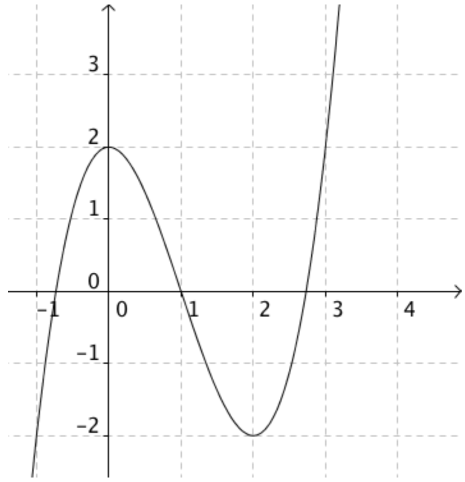
Vidéo https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2{,}5\ ;5]$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

1) • Existence de la solution :
$f(2{,}5) = 2{,}5^3 - 3 \times 2{,}5^2 + 2 = -1{,}125 < 0$
$f(5) = 5^3 - 3 \times 5^2 + 2 = 52 > 0$

La fonction f est **continue** sur l'intervalle $[2,5\,;5]$ et elle **change de signe**.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution.

• <u>Unicité de la solution :</u>
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$
Donc, pour tout x de $[2,5\,;5]$, $f'(x)>0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[2,5\,;5]$.
On en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[2,5\,;5]$.



2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

Vidéo TI https://youtu.be/MEkh0fxPakk
Vidéo Casio https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ
Vidéo HP https://youtu.be/93mBoNOpEWg

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2{,}73 < \alpha < 2{,}74$.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

TP Algorithmique "Dichotomie" :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_SolEqua.pdf

EXEMPLE 2

Vidéo **https://youtu.be/UmGQf7gkvLg**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

- f est continue sur [–1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 6 = 1$
$f(4) = 4^3 - 4 \times 4^2 + 6 = 6$
Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

III. Application à l'étude d'une suite

1) Image d'une suite convergente par une fonction continue

Théorème :
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors $f(L) = L$.

- Admis -

Méthode : Étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Vidéo **https://youtu.be/L7bBL4z-r90**
Vidéo **https://youtu.be/LDRx7aS9JsA**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.

1) Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f définie par $f(x) = 0{,}85x + 1{,}8$.

a) Tracer les droites d'équations respectives $y = 0{,}85x + 1{,}8$ et $y = x$.

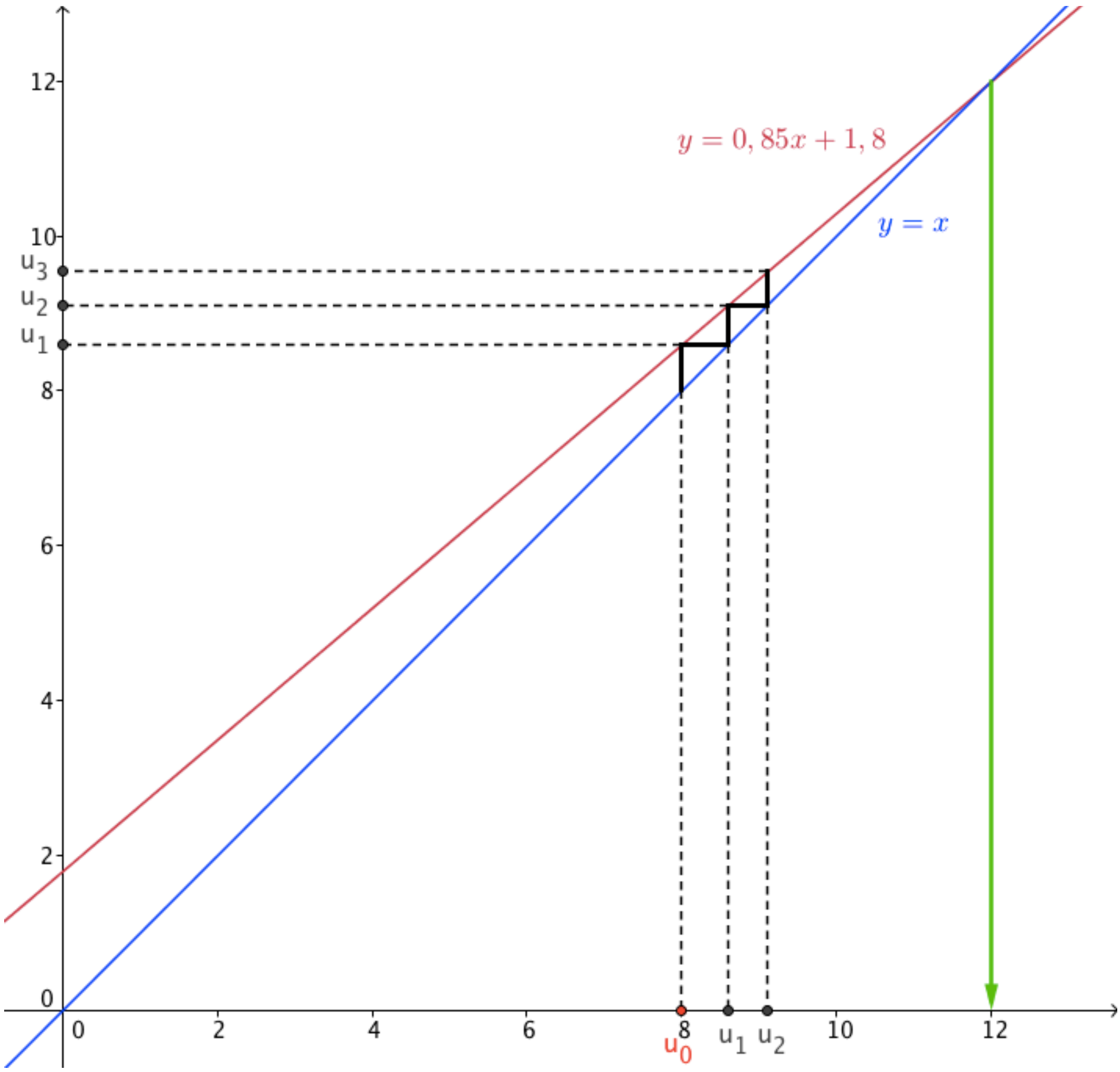
b) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.

c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2) En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.

1) a) b) - On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses. On trace l'image de u_0 par f pour obtenir sur l'axe des ordonnées $u_1 = f(u_0)$.

- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- On fait de même pour obtenir u_2 puis u_3…



c) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

2) La suite (u_n) converge et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. La limite L de la suite (u_n) est donc solution de l'équation $f(L) = L$.
Soit : $0{,}85L + 1{,}8 = L$
$L - 0{,}85L = 1{,}8$
$0{,}15L = 1{,}8$
$L = 1{,}8 : 0{,}15 = 12$

Afficher la représentation graphique sur la calculatrice :

Vidéo TI https://youtu.be/bRlvVs9KZuk

Vidéo Casio https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ

Vidéo HP https://youtu.be/wML003kdLRo

2) Variation d'une suite à l'aide d'une fonction associée

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
- Si f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : Étudier les variations d'une suite à l'aide de sa fonction associée

Vidéo https://youtu.be/dPR3GyQycH0

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}$.
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

On considère la fonction associée f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
Ainsi $u_n = f(n)$.

Étudions les variations de f :
$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$.

Pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) < 0$.

Donc f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$. On en déduit que (u_n) est décroissante.