

CONTINUITÉ DES FONCTIONS

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/9SSEUoyHh2s>

Partie 1 : Notion de continuité



Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

1) Définition

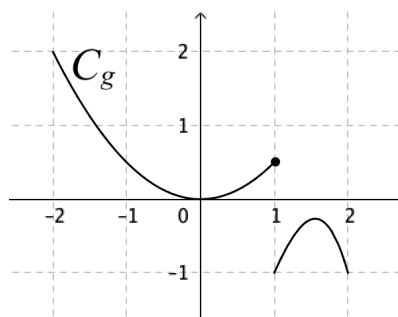
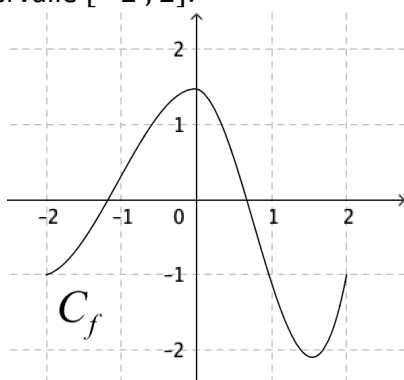
Définition intuitive :

Une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Méthode : Reconnaître graphiquement une fonction continue

▶ Vidéo <https://youtu.be/XpjKserte6o>

Étudier graphiquement la continuité des fonctions f et g définies et représentées ci-dessous sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.



Correction

- La courbe de la fonction f peut se tracer sans lever le crayon, elle semble donc continue sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.
- La courbe de la fonction g ne peut pas se tracer sans lever le crayon, elle n'est donc pas continue sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.
Cependant, elle semble continue sur $[-2 ; 1]$ et sur $]1 ; 2]$.

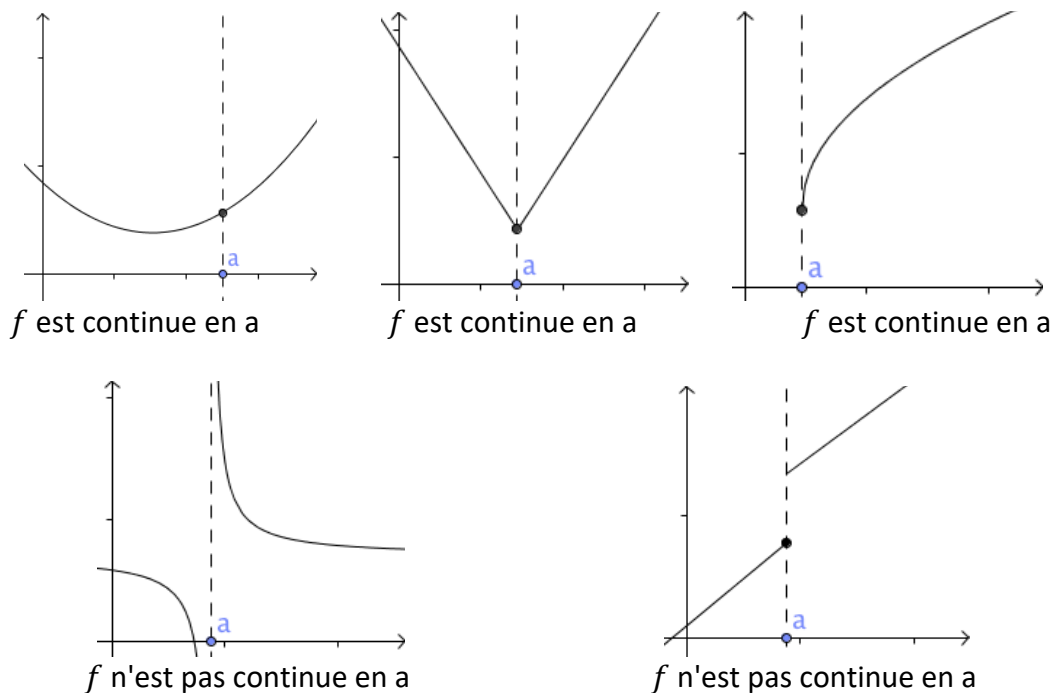
Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a .

- f est continue en a si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Théorème : Si une fonction est dérivable sur un intervalle I , alors elle est continue sur cet intervalle.

Exemples et contre-exemples :



2) Cas des fonctions de référence

Les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle donné.

Fonction	Intervalle
$ x $	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	\mathbb{R}
Polynôme	\mathbb{R}
e^x	\mathbb{R}
\sqrt{x}	$[0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[$ et $] 0 ; +\infty[$

3) Opérations sur les fonctions continues :

Propriétés :

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I .

- $f + g, f \times g, f^2$ et e^f sont continues sur I .
- Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Remarque : Dans la pratique, les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Méthode : Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

 Vidéo <https://youtu.be/03WMLyc7rLE>

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{pour } x < 3. \\ x - 4, & \text{pour } 3 \leq x < 5 \\ -2x + 13, & \text{pour } x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Correction

Les fonctions $x \mapsto -x + 2$, $x \mapsto x - 4$ et $x \mapsto -2x + 13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur \mathbb{R} .

Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty ; 3[$, sur $[3 ; 5[$ et sur $[5 ; +\infty[$.

Étudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

$$- \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} -x + 2 = -3 + 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

Et donc la fonction f est continue en 3.

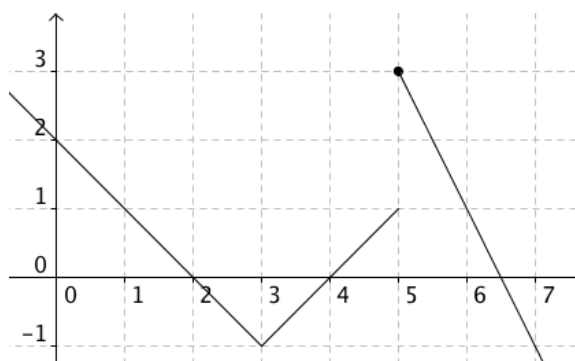
$$- \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} x - 4 = 5 - 4 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} -2x + 13 = -2 \times 5 + 13 = 3$$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5. La fonction f n'est donc pas continue en 5.

La fonction f est continue sur $]-\infty ; 5[$ et sur $[5 ; +\infty[$.

En représentant la fonction f , on peut observer graphiquement le résultat précédent.



Partie 2 : Théorème des valeurs intermédiaires

Exemple :

On donne le tableau de variations de la fonction f .

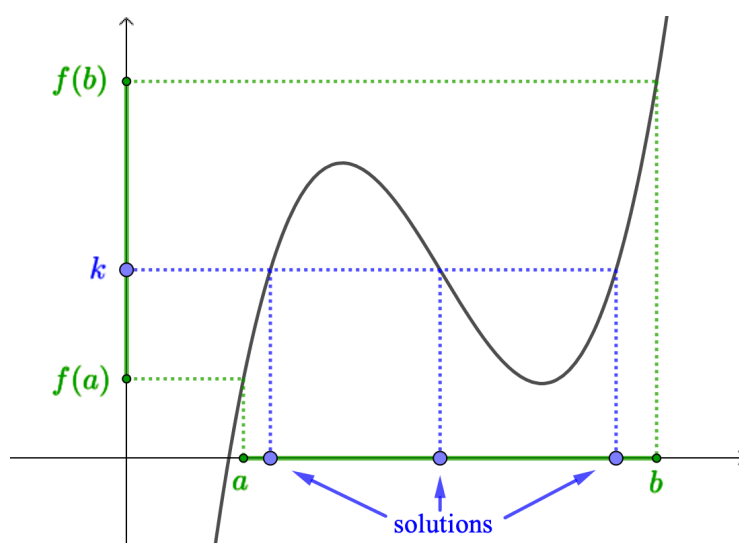
x	-4	-3	-1	1
f	-1	3	-1	19

Il est possible de lire dans le tableau, le nombre de solutions éventuelles pour des équations du type $f(x) = k$:

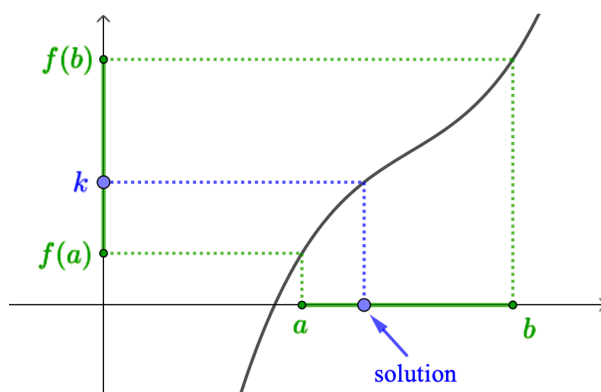
- L'équation $f(x) = 18$ possède 1 solution comprise dans l'intervalle $] -1 ; 1[$.
- L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $] -4 ; -3[$, $] -3 ; -1[$ et $] -1 ; 1[$.
- L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.
- L'équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l'une égale à -3 , l'autre comprise dans l'intervalle $] -1 ; 1[$.

Théorème des valeurs intermédiaires :

- On considère la fonction f **continue** sur l'intervalle $[a ; b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b .



- Dans le cas où la fonction f est **strictement monotone** sur l'intervalle $[a ; b]$, alors la solution est unique.



Dans la pratique :

Pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a ; b]$, on démontre que :

1. f est **continue** sur $[a ; b]$,
2. f **change de signe** sur $[a ; b]$,
3. f est **strictement monotone** sur $[a ; b]$,

Les conditions 1 et 2 nous assurent que des solutions existent.

Avec la condition 3 en plus, nous savons que la solution est unique.

Méthode : Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (1)

▶ Vidéo <https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y>

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

- 1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
- 2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α .

Correction

1) • La fonction f est **continue** sur l'intervalle $[1 ; 2]$, car une fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .

$$\bullet f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 = -1 < 0$$

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 1 = 3 > 0$$

Donc la fonction f **change de signe** sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

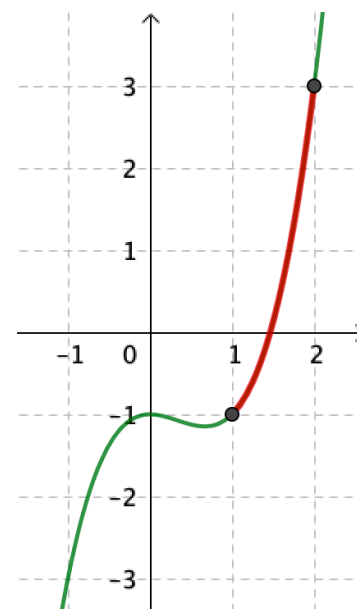
$$\bullet f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

Donc, pour tout x de $[1 ; 2]$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc **strictement croissante** sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

▶ D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet alors une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des « balayages » successifs en augmentant la précision.



▶ Vidéo TI <https://youtu.be/MEkh0fxPakk>

▶ Vidéo Casio <https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ>

▶ Vidéo HP <https://youtu.be/93mBoNOpEWg>

• La solution est comprise entre 1,4 et 1,5.

En effet : $f(1,4) \approx -0,216 < 0$

$$f(1,5) \approx 0,125 > 0$$

X	Y1
1	-1
1.1	-0.879
1.2	-0.712
1.3	-0.493
1.4	-0.216
1.5	0.125
1.6	0.536
1.7	1.023

- La solution est comprise entre 1,46 et 1,47.

En effet : $f(1,46) \approx -0,019 < 0$

$$f(1,47) \approx 0,0156 > 0$$

On en déduit que : $1,46 < \alpha < 1,47$.

X	Y ₁
1.39	-0.246
1.4	-0.216
1.41	-0.185
1.42	-0.153
1.43	-0.121
1.44	-0.088
1.45	-0.054
1.46	-0.019
1.47	0.0156
1.48	0.0514
1.49	0.0878

Méthode : Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (2)

 Vidéo <https://youtu.be/UmGQf7gkvLg>

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.

Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur $[-1 ; 4]$.


Correction

- f est **continue** sur $[-1 ; 4]$ car une fonction polynôme est continue sur \mathbb{R} .

- $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 6 = 1$

$$f(4) = 4^3 - 4 \times 4^2 + 6 = 6$$

Donc **2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$** .

 D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[-1 ; 4]$.

Remarque : Ici, on n'a pas la stricte monotonie de f , donc on n'a pas l'unicité de la solution.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales