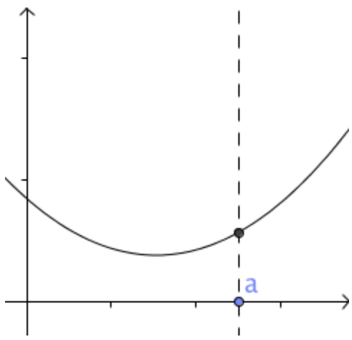
CONTINUITÉ DES FONCTIONS

I. Notion de continuité

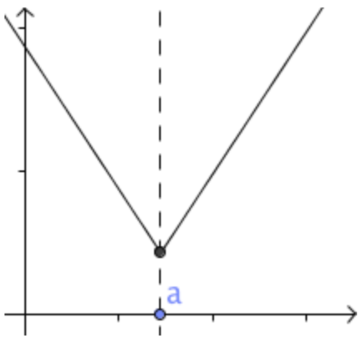
Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

Vidéo https://youtu.be/XpjKserte6o

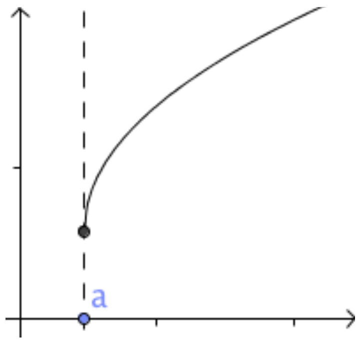
Exemples et contre-exemples :



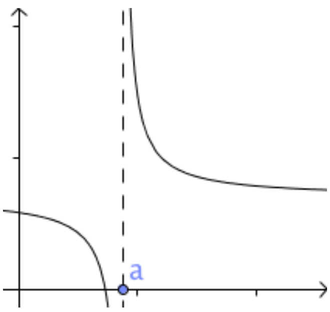
f est continue en a



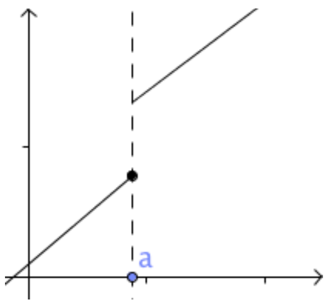
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Exemples :
- Les fonctions $x \longmapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et elle est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Remarque : Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Méthode : Étudier la continuité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/gLmACk8BpAE

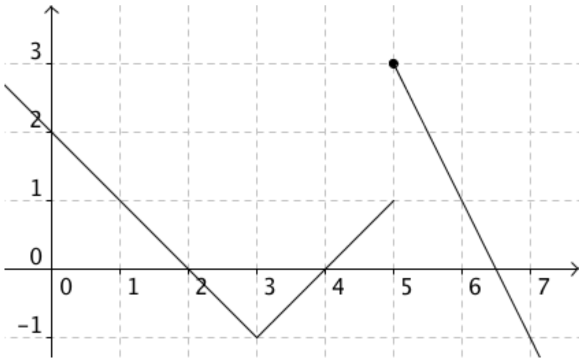
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2, \; pour\ x < 3. \\ x-4, \; pour\ 3 \leq x < 5 \\ -2x+13, \; pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \longmapsto -x+2$, $x \longmapsto x-4$ et $x \longmapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty\,;3[$, sur $[3\,;\,5[$ et sur $[5\,;\,+\infty[$.

On peut tracer la fonction f sur $]-\infty\,;5[$ sans lever le crayon, elle est donc continue sur cet intervalle. Il en est de même sur l'intervalle $[5\,;\,+\infty[$.

Par contre, il n'est pas possible de franchir ces deux intervalles sans lever le crayon. La fonction f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.



La fonction f est ainsi continue sur $]-\infty\,;5[$ et sur $[5\,;\,+\infty[$.

II. Valeurs intermédiaires

1) Solution d'une équation du type $f(x) = k$

Exemples : Il est possible de lire sur le tableau de variations, le nombre de solution(s) éventuelle(s) de chacune des équations ci-dessous et encadrer au mieux ces solutions.

a) $f(x) = 18$

b) $f(x) = 0$

c) $f(x) = -3$

d) $f(x) = 3$

x	-4		-3		-1		1
f			3				19
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-1				-1		

a) L'équation $f(x) = 18$ possède 1 solution comprise dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

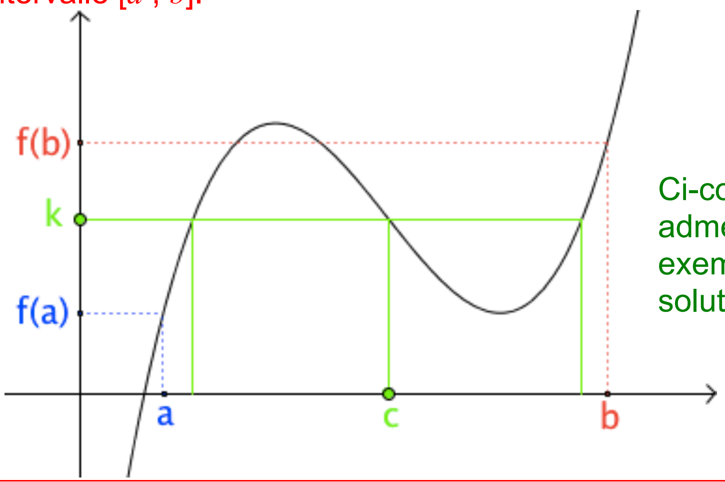
b) L'équation $f(x) = 0$ possède 3 solutions chacune comprise dans un des intervalles $]-4\,;-3[$, $]-3\,;-1[$ et $]-1\,;1[$.

c) L'équation $f(x) = -3$ ne possède pas de solution.

d) L’équation $f(x) = 3$ possède 2 solutions : l’une égale à -3, l’autre comprise dans l’intervalle $]-1\,;1[$.

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une solution** dans l'intervalle $[a\,;b]$.

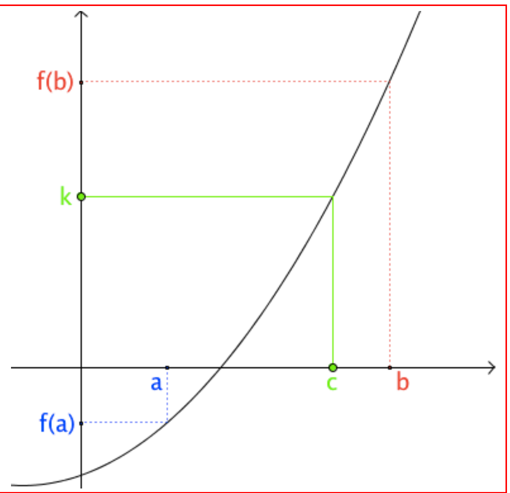


Ci-contre, $f(x) = k$ admet par exemple c comme solution.

- Admis -

Cas particuliers :
Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l’équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l’intervalle $[a\,;b]$.

Corollaire :
On considère la fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** dans l'intervalle $[a\,;b]$.



Méthode : Résolution approchée d'une équation

EXEMPLE 1

Vidéo https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y

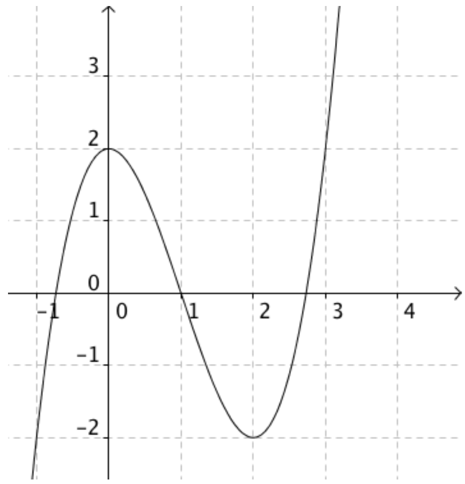
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2{,}5\,;5]$.

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

1) • <u>Existence de la solution :</u>
$f(2,5) = 2,5^3 - 3 \times 2,5^2 + 2 = -1,125 < 0$
$f(5) = 5^3 - 3 \times 5^2 + 2 = 52 > 0$

La fonction f est **continue** sur l'intervalle $[2,5\,;5]$ et elle **change de signe**.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

• <u>Unicité de la solution :</u>
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
Donc, pour tout x de $[2,5\,;5]$, $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[2,5\,;5]$.
On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2,5\,;5]$.



2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

Vidéo TI https://youtu.be/MEkh0fxPakk
Vidéo Casio https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ
Vidéo HP https://youtu.be/93mBoNOpEWg

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2{,}73 < \alpha < 2{,}74$.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

TP Algorithmique "Dichotomie" :
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_SolEqua.pdf

EXEMPLE 2

Vidéo https://youtu.be/UmGQf7gkvLg

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

- f est continue sur [–1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 6 = 1$
$f(4) = 4^3 - 4 \times 4^2 + 6 = 6$
Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur [–1 ; 4].