CONVEXITÉ

I. Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.
On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' et on note :
$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.

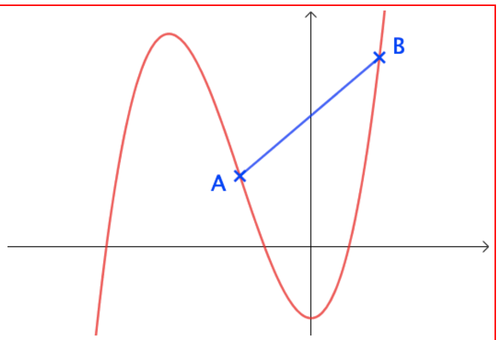
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 9x^2 - 10x$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = 18x - 10$.

II. Fonction convexe et fonction concave

Vidéo https://youtu.be/ERML85y_s6E

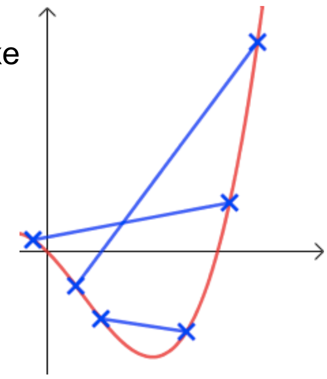
1) Définitions avec les cordes

Définition : Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

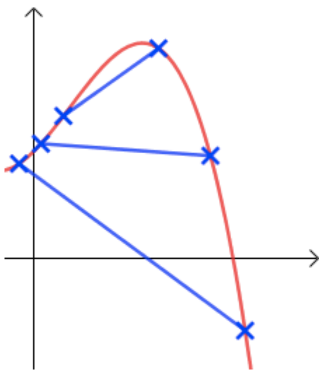


Définitions : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
- La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.
- La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

Fonction convexe

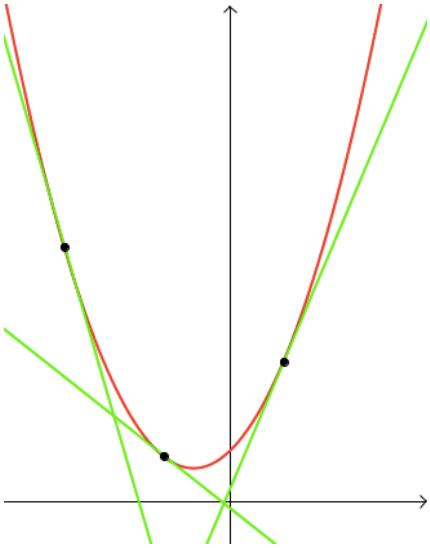


Fonction concave

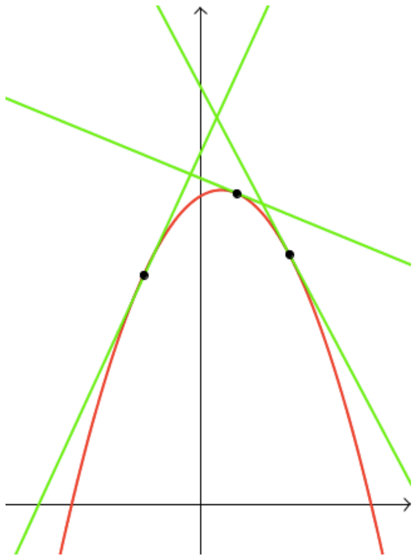


2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
- La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



Fonction concave

3) Propriétés

Propriétés :
- La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

- Admis -

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Dire que la fonction f est convexe sur I, revient à dire que sa dérivée f' est croissante sur I, soit :

$f''(x) \geq 0$, pour tout x de I.

- Dire que la fonction f est concave sur I, revient à dire que sa dérivée f' est décroissante sur I, soit :

$f''(x) \leq 0$, pour tout x de I.

Démonstration au programme :
- Démontrons que f est convexe, si f' est croissante :
On considère la fonction g dérivable sur I et définie par :
$g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$.

Alors : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Or f' est croissante sur I, donc g' est également croissante.
De plus, $g'(a) = 0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.
On peut donc compléter le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En effet : $g(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0$
Donc $g(x) \geq 0$ sur I.
Soit $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$
On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.

- Démonstration analogue pour prouver que f est concave, si f' est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/8H2aYKN8NGE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.
Étudier la convexité de la fonction f.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2 - 18x$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 2x - 18$ qui s'annule pour $x = 9$.

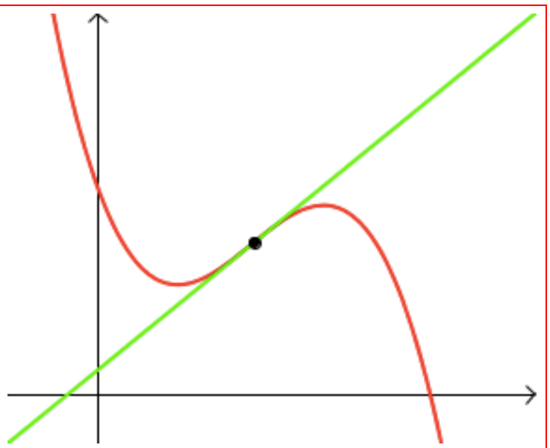
Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$.
Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $]-\infty\,; 9]$ et f est convexe sur $[9\,;\,+\infty[$.

III. Point d'inflexion

Vidéo https://youtu.be/r8sYr6ToeLo

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

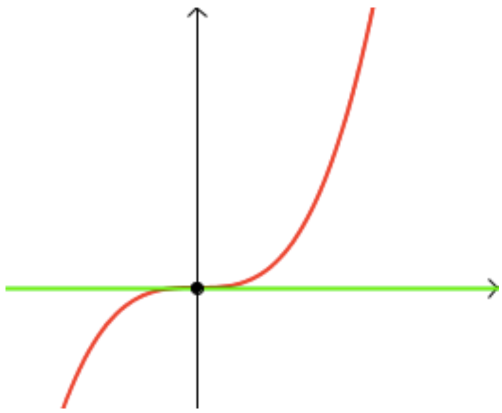


Remarque importante :
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :
On considère la fonction cube $x \longmapsto x^3$.
La tangente au point O(0,0) est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.
Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.
Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.



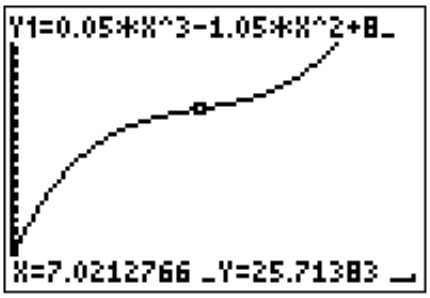
Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

Vidéo https://youtu.be/_XlgCeLcN1k

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par : $C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$.

1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle [7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x = 7$.



2) $C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$
Donc : $C'(x) = 0{,}15x^2 - 2{,}1x + 8$
Et : $C''(x) = 0{,}3x - 2{,}1$

Or, $0{,}3x - 2{,}1 = 0$ pour $x = 7$.
On peut ainsi résumer les variations de C' et la convexité de C dans le tableau suivant :

x	0		7		10
$C''(x)$		–	0	+	
$C'(x)$		↘		↗	
Convexité de C		concave		convexe	

$C(7) = 25{,}7$
Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication C s'accélère. Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie.
Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

<u>Méthode :</u> Prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/AaxQHlsxZkg

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.
a) Étudier la convexité de la fonction f.
b) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en –1.
c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.

a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 - 4x$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 6x - 4$ qui s'annule pour $x = \frac{2}{3}$.

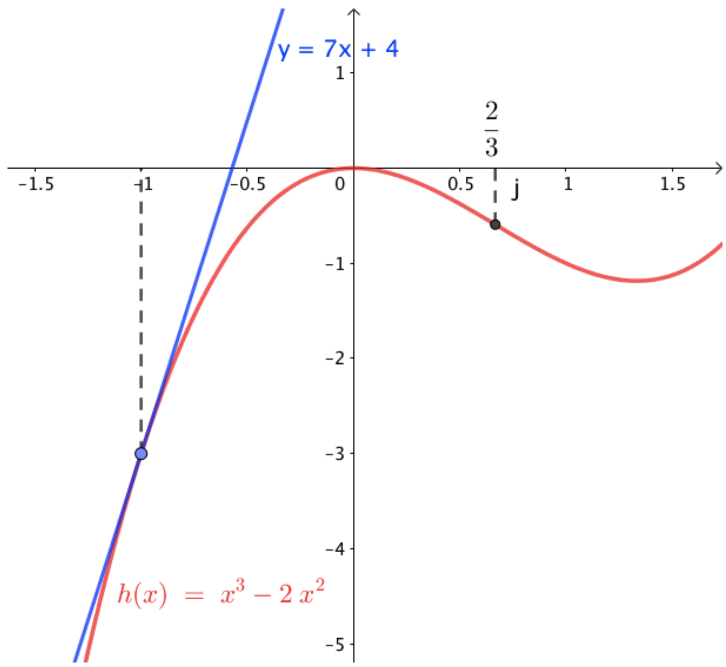
Pour tout $x \leq \frac{2}{3}$: $f''(x) \leq 0$.
Pour tout $x \geq \frac{2}{3}$: $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$ et f est convexe sur $\left[\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.

b) L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en –1 est de la forme :
$$y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1)$$
Or, $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) = 7$ et $f(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 = -3$

Donc, l'équation de la tangente en –1 est : $y = 7(x + 1) - 3$
Soit : $y = 7x + 4$

c) f est concave sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$ donc sur cet intervalle, la courbe représentative de f est située en dessous de ses tangentes.
Soit, en particulier, la courbe de f est située en dessous de la tangente en –1.
On a ainsi, $f(x) \leq 7x + 4$ sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$.
Soit $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$ sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$ et donc en particulier pour tout x négatif.


y = 7x + 4
2
3
j
h(x) = x³ − 2 x²
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
1
-1
-2
-3
-4
-5