

CONVEXITÉ

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/gge4xdn6cFA>

Partie 1 : Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I .

On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' et on note :

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Méthode : Calculer la dérivée seconde d'une fonction

▶ Vidéo <https://youtu.be/W6rypabq8uA>

Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions f , g et h définies par :

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$$

$$g(x) = xe^x$$

$$h(x) = \cos(2x)$$

Correction

- $f'(x) = 9x^2 - 10x$

$$f''(x) = (f'(x))' = 18x - 10$$

- $g'(x) = 1 \times e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$$g''(x) = e^x(1 + x) + e^x \times 1 = e^x(2 + x)$$

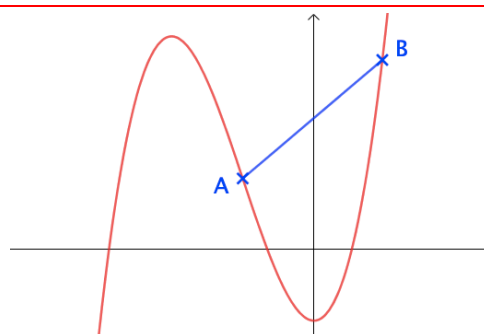
- $h'(x) = -2\sin(2x)$

$$h''(x) = -2 \times 2 \cos(2x) = -4\cos(2x)$$

Partie 2 : Fonction convexe et fonction concave

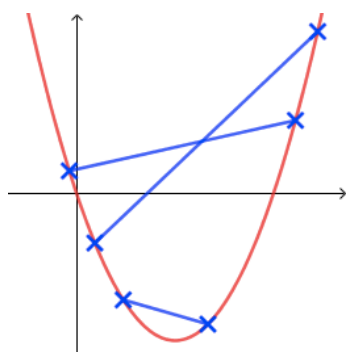
1) Définitions avec les cordes

Définition : Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

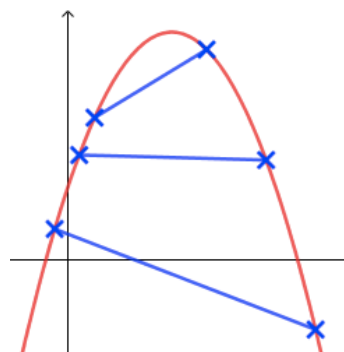


Définitions : Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.
- La fonction f est **concave** sur I , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



Fonction convexe

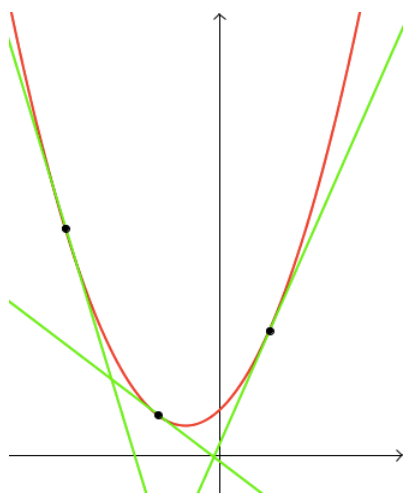


Fonction concave

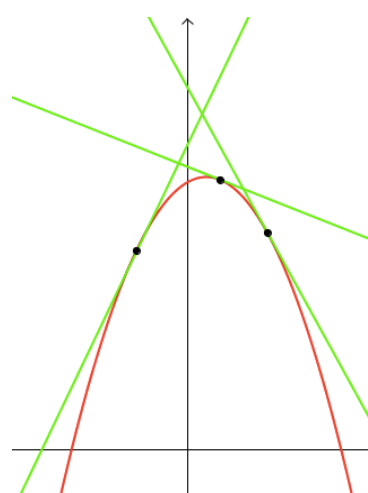
2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **convexe** sur I , si sa courbe est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est **concave** sur I , si sa courbe est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



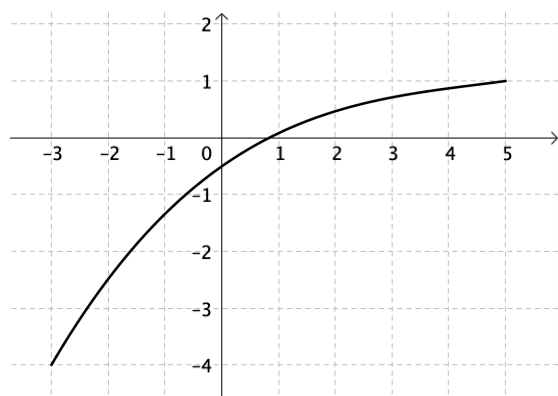
Fonction concave

Méthode : Reconnaître graphiquement la convexité

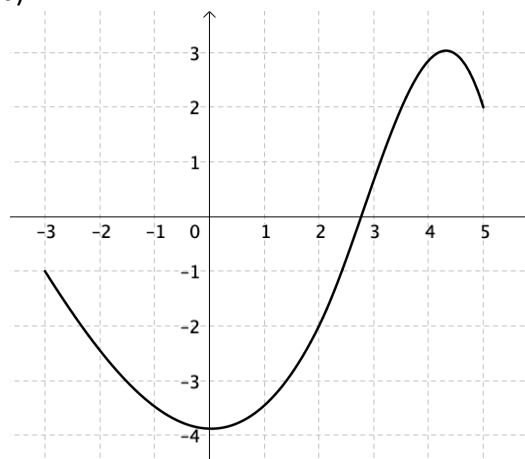
▶ Vidéo https://youtu.be/ERML85y_s6E

Reconnaître graphiquement la convexité des deux fonctions représentées sur l'intervalle $[-3 ; 5]$.

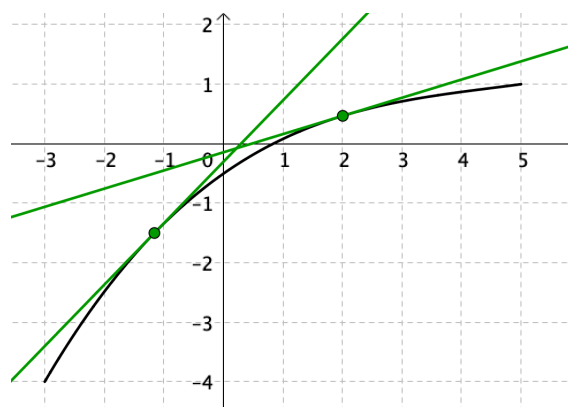
a)



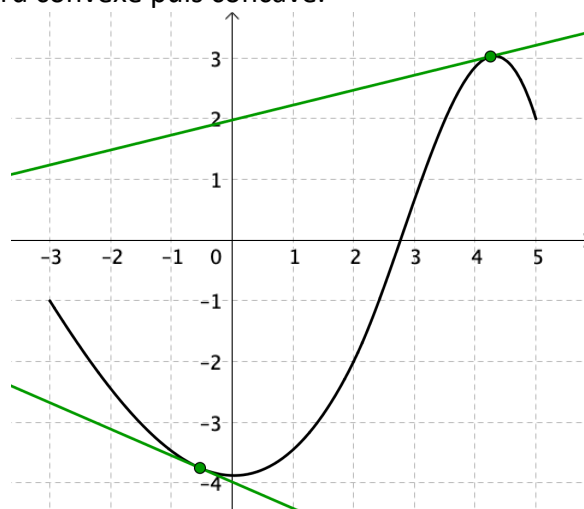
b)

**Correction**

a) La fonction est concave. Sa courbe est en effet entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



b) La fonction est d'abord convexe puis concave.



Remarque : On aurait pu obtenir ses résultats en utilisant les cordes.

3) Propriétés

Propriétés :

- La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} .
- La fonction cube $x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty ; 0[$ et convexe sur $]0 ; +\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0 ; +\infty[$.

- Admis -

Propriété :

Soit une fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Dire que la fonction f est convexe sur I , revient à dire que sa dérivée f' est croissante sur I , soit : $f''(x) \geq 0$.
- Dire que la fonction f est concave sur I , revient à dire que sa dérivée f' est décroissante sur I , soit : $f''(x) \leq 0$.

Remarque : Dans la pratique, pour étudier la convexité d'une fonction, on détermine le signe de la dérivée seconde.

Démonstration au programme :

📺 Vidéo <https://youtu.be/-OG8I5Batuo>

- Démontrons que : f est convexe, si f' est croissante :

On considère la fonction g dérivable sur I et définie par :

$$g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a).$$

Alors : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Or f' est croissante sur I , donc g' est également croissante.

De plus, $g'(a) = 0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.

On peut donc compléter le tableau de variations de g .

x	a		
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

En effet : $g(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0$

Donc $g(x) \geq 0$ sur I .

Soit $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I .

- Démonstration analogue pour prouver que : f est concave, si f' est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d'une fonction

 Vidéo <https://youtu.be/8H2aYKN8NGE>

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.
Étudier la convexité de la fonction f .

Correction

$$f'(x) = x^2 - 18x.$$

$$f''(x) = 2x - 18$$

On a : $f''(x) = 0$ pour $x = 9$.

Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$.

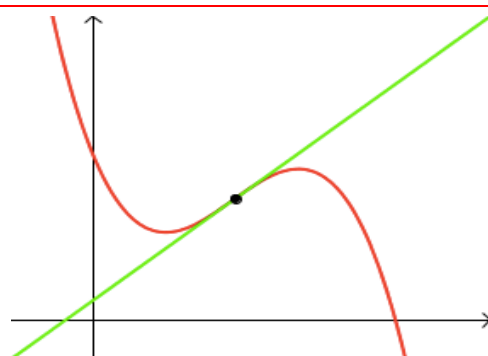
Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $]-\infty ; 9]$ et f est convexe sur $[9 ; +\infty[$.

Partie 3 : Point d'inflexion

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente.



Propriété : Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :

On considère la fonction cube $x \mapsto x^3$.

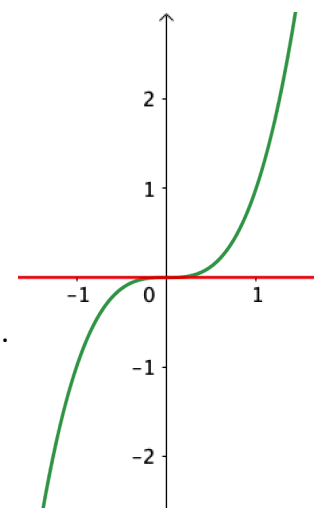
La tangente en 0 est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe traverse donc la courbe en ce point.

L'origine est donc le point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

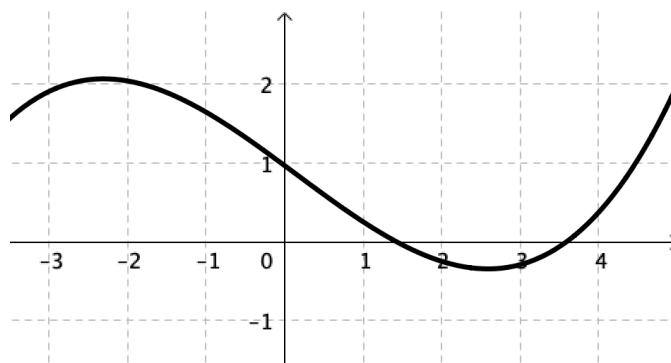


Méthode : Reconnaître graphiquement un point d'inflexion

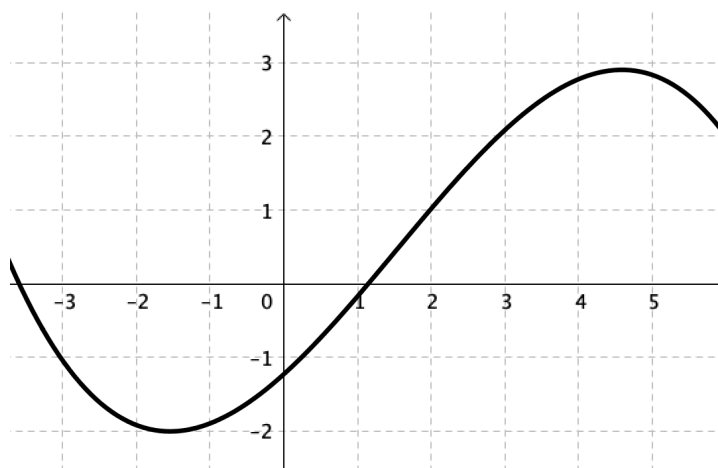
▶ Vidéo <https://youtu.be/r8sYr6ToeLo>

Déterminer graphiquement le point d'inflexion des fonctions représentées ci-dessous.

a)

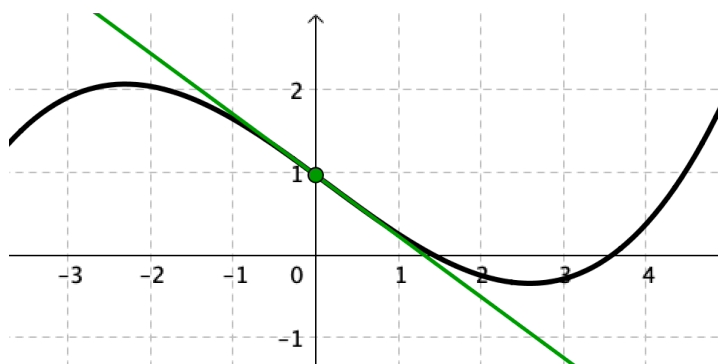


b)

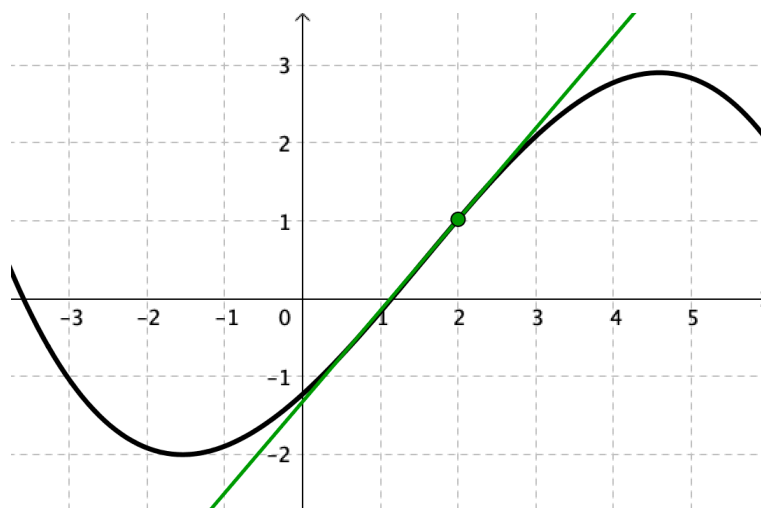


Correction

a) La fonction est d'abord concave puis convexe. Le point de coordonnées $(0 ; 1)$ semble être un point d'inflexion de la courbe.



b) La fonction est d'abord convexe puis concave. Le point de coordonnées $(2 ; 1)$ semble être un point d'inflexion de la courbe.



Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

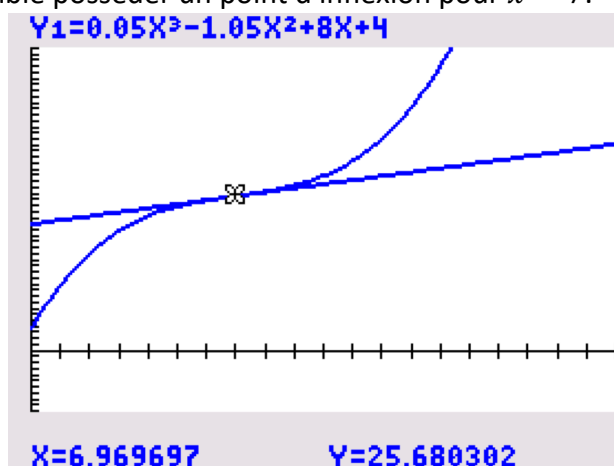
📺 Vidéo https://youtu.be/_XlgCeLcN1k

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois. Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par : $C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$, définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

- 1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la convexité de la fonction C . En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
- 2) Démontrer ces résultats.
- 3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

Correction

1) La fonction semble concave sur l'intervalle $[0 ; 7]$ et convexe sur l'intervalle $[7 ; 10]$. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x = 7$.



$$\begin{aligned} 2) C(x) &= 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4 \\ C'(x) &= 0,15x^2 - 2,1x + 8 \\ C''(x) &= 0,3x - 2,1 \end{aligned}$$

Or, $0,3x - 2,1 = 0$ pour $x = 7$.

On peut ainsi résumer les variations de C' et la convexité de C dans le tableau suivant :

x	0	7	10	
$C''(x)$		-	0	+
$C'(x)$				
Convexité de C		concave	convexe	

$$C(7) = 25,7$$

Ainsi, le point de coordonnées $(7 ; 25,7)$ est un point d'inflexion de la courbe.

3) Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication C ralentie. Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction

Vidéo <https://youtu.be/AaxQHlsxZkg>

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 2x^2$.

a) Étudier la convexité de la fonction f .

b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en -1 .

c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.

Correction

$$a) f'(x) = 3x^2 - 4x.$$

$$f''(x) = 6x - 4 \text{ qui s'annule pour } x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Pour tout } x \leq \frac{2}{3} : f''(x) \leq 0.$$

$$\text{Pour tout } x \geq \frac{2}{3} : f''(x) \geq 0.$$

$$\text{Donc } f \text{ est concave sur }]-\infty ; \frac{2}{3}] \text{ et } f \text{ est convexe sur } [\frac{2}{3} ; +\infty[.$$

b) L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en -1 est de la forme :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$\text{On a : } f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) = 7$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 = -3$$

Donc, l'équation de la tangente en -1 est : $y = 7(x + 1) - 3$ soit :

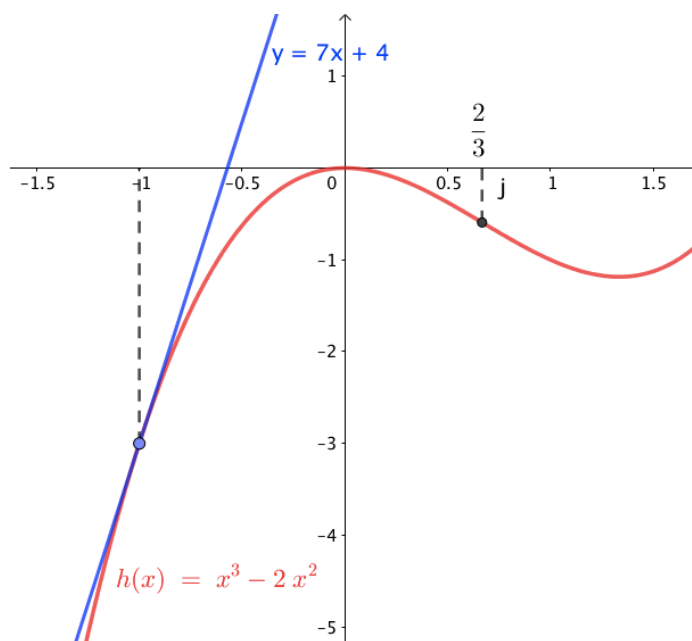
$$y = 7x + 4$$

c) f est concave sur $] -\infty ; \frac{2}{3}]$ donc sur cet intervalle, la courbe représentative de f est située en dessous de ses tangentes.

Soit, en particulier, la courbe de f est située en dessous de la tangente en -1 .

On a ainsi, $f(x) \leq 7x + 4$ sur $]-\infty ; \frac{2}{3}]$.

Soit $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$ sur $]-\infty ; \frac{2}{3}]$ et donc en particulier pour tout x négatif.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales